

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE MATH 1 DE L'X 2009

Première partie

- (1) Soit $g(t) = f(e^t x)$ alors $g'(t) = x e^t f'(e^t x)$ d'où $g'(0) = x f'(x) = (Af)(x)$.
 (2) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f(x) = x^p$ alors, par une récurrence immédiate, $(A^n f)(x) = p^n x^p$ d'où

$$\frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = \frac{(pt)^n}{n!} x^p$$

qui est le terme général d'une série exponentielle convergente. On a alors

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = e^{pt} x^p = (e^t x)^p = (\Phi_t f)(x).$$

Par linéarité, cette propriété s'étend aux polynômes.

- (3) Immédiat : $(D^n X)(f)(x) = (x f(x))^{(n)} = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) = (XD^n + nD^{n-1})(f)(x)$.
 (4) Pour $n = 1$ on sait que $A = XD$, on procède alors par récurrence sur n avec $\mu_{1,1} = 1$.
 Supposons la propriété vraie à l'ordre n ,

$$\begin{aligned} (A^{n+1} f)(x) &= A \left(\sum_{k=1}^n \mu_{n,k} X^k D^k \right) (f)(x) \\ &= x \left(\sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right)' \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} k x^k f^{(k)}(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^{k+1} f^{(k+1)}(x)}_{= \sum_{k=2}^{n+1} \mu_{n,k-1} x^k f^{(k)}(x)}. \end{aligned}$$

On obtient la formule à l'ordre $n + 1$ en posant $\mu_{n+1,1} = \mu_{n,1}$, $\mu_{n+1,n+1} = \mu_{n,n}$ et $\mu_{n+1,k} = k\mu_{n,k} + \mu_{n,k-1}$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

On déduit de ceci les relations $\mu_{n,1} = 1$ et $\mu_{n,n} = 1$.

- (5) On applique le résultat du **2** avec la formule du **4** :

$$\begin{aligned} f(e^t x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right) \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right) \end{aligned}$$

et il suffit de permuter les sommes.

Compte tenu là aussi de la linéarité de la formule, il suffit de prouver le résultat pour $f(x) = x^p$.

Soit $u_{n,k} = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \frac{p!}{(p-k)!} x^p & \text{si } k \leq \min(n, p) \\ 0 & \text{si } k > \min(n, p) \end{cases}$. $u_{n,k} \geq 0$, $\sum_k u_{n,k}$ et $\sum_n \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}$ convergent aussi donc on peut appliquer le théorème d'interversion des sommations :

$$\begin{aligned} f(e^t x) &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} \right) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \geq k} u_{n,k} \right) \\ &= f(x) + \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq k} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

(6) C'est du cours !

(7) (a) On a $\lim_{t \rightarrow 0} |(e^t - 1)x| = 0$ d'où l'existence d'un réel γ_x tel que

$$|t| < \gamma_x \Rightarrow |(e^t - 1)x| < R - |x|.$$

On peut aussi utiliser l'inégalité $|e^t - 1| \leq e^{|t|} - 1$ obtenue par exemple en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle puis raisonner par équivalences en supposant $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} |(e^{|t|} - 1)x| < R - |x| &\Leftrightarrow e^{|t|} - 1 < \frac{R - |x|}{|x|} = \frac{R}{|x|} - 1 \\ &\Leftrightarrow e^{|t|} < \frac{R}{|x|} \Leftrightarrow |t| < \ln \frac{R}{|x|} = \gamma_x \end{aligned}$$

avec $\gamma_x > 0$ car $|x| < R$ (et γ_0 peut prendre n'importe quelle valeur positive). Ceci fournit explicitement une valeur de γ_x .

(b) On applique la propriété rappelée avec $h = e^t x - x = (e^t - 1)x$, $|h| < R - |x|$:

$$f(x + h) = f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(e^t - 1)^k}{k!} x^k f^{(k)}(x).$$

Or $e^t - 1$ est D.S.E., de rayon infini, il en est de même pour $\frac{(e^t - 1)^k}{k!}$:

$$\frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k}$$

et on remarque que $\lambda_{n,k} = 0$ si $n < k$ (on peut mettre t^k en facteur) et les $\lambda_{n,k}$ ne dépendent pas de f .

(c) Pour $f(x) = (x - 1)^p$ on obtient 2 développements de $f(e^t x)$:

$$f(x) + \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq k} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) = f(x) + \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x)$$

avec $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-k)!} (x-1)^{p-k} & \text{si } k \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. En prenant $x = 1$ dans chaque

terme de l'égalité, il ne reste que le terme d'indice $k = p$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} p! (\mu_{n,p} - \lambda_{n,p}) = 0$$

(on a rajouté les termes nuls pour $n < k$). Compte tenu de l'unicité du développement en série entière, on obtient directement $\mu_{n,p} = \lambda_{n,p}$ pour tout n et ceci est valable pour tout p .

(d) On utilise la relation de récurrence du 4 : $\lambda_{n+1,k} = k\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}$ et on fait une récurrence sur n :

- pour $n = 1$, $\lambda_{1,1} = 1 \leq 2$ et $\lambda_{1,k} = 0$ pour $k > 1$.

- On suppose qu'à l'ordre n , $\lambda_{n,k} \leq \frac{2^n n!}{(k-1)!}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On a $\lambda_{n+1,1} = 1 \leq 2^{n+1}(n+1)!$ et $\lambda_{n+1,n+1} = 1 \leq 2^{n+1} \frac{(n+1)!}{n!}$ (majorations larges !).

- Si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ alors

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1,k} &\leq k \frac{2^n n!}{(k-1)!} + \frac{2^n n!}{(k-2)!} = \frac{2^n}{(k-1)!} (2k-1) \\ &\leq \frac{2^n n!}{(k-1)!} \times 2n \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

(e) On prend $\eta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{R}{2}$ alors

$$\begin{aligned} |Z_{n,k}| &\leq \frac{|t|^n}{n!} \times \frac{2^n n!}{(k-1)!} |x|^k |f^{(k)}(x)| \\ &\leq (2|t|)^n \times \frac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Or $\sum_n |Z_{n,k}|$ converge, de somme $\frac{1}{1-2|t|} \times \frac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}$ et on sait (question 6) que

$\sum \frac{x^k f^{(k)}(a)}{k!}$ et $\sum k \frac{x^k f^{(k)}(a)}{k!}$ ont même rayon de convergence (en l'occurrence $R -$

$|a|$). Avec $a = x$ on en déduit que $\sum \frac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}$ converge pour $|x| < \frac{R}{2}$.

(f) Si $|t| < 1/2$ alors $|e^t - 1| < 1/2$ et $|(e^t - 1)x| < \frac{R}{2} < R - |x|$, on peut alors utiliser le résultat de la question 7.b :

En appliquant le théorème d'interversion des sommations, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} Z_{n,k} \right) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} Z_{n,k} \right) \\ &= f(e^t x) = (\Phi_t f)(x). \end{aligned}$$

Deuxième partie

(8) Soit $M_k(f) = \sup_{\mathbb{R}} |x^k f(x)|$ alors au voisinage de l'infini, $|x^k f(x)| \leq \frac{M_{k+2}}{x^2}$ par conséquent

$x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} (elle est localement intégrable car continue).

(9) (a) Là encore, le problème se pose au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} |y^2 g(y)| &\leq M_1(g) \\ |f(x-y)| &\leq M_0(f) \end{aligned}$$

On a ainsi, au voisinage de l'infini, $|f(x-y)g(y)| \leq \frac{M_1(g)M_0(f)}{y^2}$ et, par domination,

$y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

(b) Montrons que $f * g$ est continue :

- $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur \mathbb{R} ,
- $x \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur \mathbb{R} ,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x-y)g(y)| \leq M_0(f)|g(y)| \in L^1(\mathbb{R})$

donc, en vertu du théorème de continuité sous l'intégrale, $f * g$ est continue.

Soient f et g dans \mathcal{F} alors

$$\begin{aligned} \left| x^k \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (x-y+y)^k f(y)g(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (x-y)^{k-p} g(x-y) \times y^p f(y) dy \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} M_{k-p}(g) \int_{\mathbb{R}} y^p f(y) dy, \end{aligned}$$

car $y \mapsto y^p f(y)$ est intégrable sur \mathbb{R} . $x^k f * g(x)$ est bornée pour tout k et $f * g$ est continue donc $f * g \in \mathcal{F}$.

On a, en appliquant Fubini

$$\begin{aligned} m_k(f * g) &= \int_{\mathbb{R}} x^k \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \right) dx \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} y^p f(y) \times (x-y)^{k-p} g(x-y) dy \right) dx \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} y^p f(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} (x-y)^{k-p} g(x-y) dx \right)}_{=m_{k-p}(g)} dy \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} m_p(f) m_{k-p}(g). \end{aligned}$$

On a pu appliquer Fubini ici car, en posant $M'_p(f) = M_{p+2}(f) + M_p(f)$, on a

- $y \mapsto y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)$ est borné par $M_{k-p}(g)|y^p f(y)|$ donc intégrable sur \mathbb{R} ,
- $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y) dy$ est intégrable car elle est majorée par $\int_{\mathbb{R}} \frac{M'_p(f)}{y^2+1} \times \frac{M'_{k-p}(g)}{(x-y)^2+1} dy = M'_p(f) \cdot M'_{k-p}(g) \frac{2\pi}{x^2+4}$ qui est intégrable (merci MAPLE).

Il nous faut aussi l'intégration en intervertissant les variables :

- $x \mapsto y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)$ est intégrable car on peut la majorer par $M_p(f) \times |x-y|^{k-p} |g(x-y)|$ qui est intégrable car majorée par $\frac{M'_{k-p}(g)}{(y-x)^2+1}$,
- $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y) dx = y^p f(y) \int_{\mathbb{R}} u^{k-p} g(u) du$ qui est aussi intégrable.

OUF !

- (10) • On sait que $m_0(f_1 * f_2) = m_0(f_1) \cdot m_0(f_2) = 1$ (formule du **9.b**) et par une récurrence immédiate, $m_0(f_1 * \dots * f_n) = 1$.
- Avec la même formule, $m_1(f_1 * f_2) = m_1(f_1) \cdot m_0(f_2) + m_0(f_1) \cdot m_1(f_2) = 0$ et, par récurrence et associativité de $*$, $m_1(f_1 * \dots * f_n) = 0$ (en fait \mathcal{F}_0 est stable par $*$).
- $m_2(f_1 * f_2) = m_0(f_1)m_2(f_2) + 2m_1(f_1)m_1(f_2) + m_2(f_1)m_0(f_2) = m_2(f_1) + m_2(f_2)$. Par récurrence, on suppose que $m_2(f_1 * \dots * f_n) = m_2(f_1) + \dots + m_2(f_n)$ alors

$$\begin{aligned} m_2[(f_1 * \dots * f_n) * f_{n+1}] &= m_0(f_1 * \dots * f_n)m_2(f_{n+1}) + 2m_1(f_1 * \dots * f_n)m_1(f_{n+1}) \\ &\quad + m_2(f_1 * \dots * f_n)m_0(f_{n+1}) \\ &= m_2(f_{n+1}) + m_2(f_1) + \dots + m_2(f_n) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

(11) Immédiat : $m_k(T_a(f)) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(ax) \, d(ax) = \frac{1}{a^k} m_k(f)$.

(12) (a) On a $m_2(T_n F_n) = \frac{1}{n^2} m_2(F_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n m_2(f_i) \leq \frac{C}{n} \rightarrow 0$ puis

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) \, dx \leq \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 (T_n F_n)(x) \, dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} m_2(T_n F_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc $\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) \, dx \rightarrow 0$.

C'est exactement pareil avec $\int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x) \, dx$.

(b) Supposons donc dans un premier temps que $h(0) = 0$.

- Choisissons α pour que $|h(x)| \leq \varepsilon/2$ dès que $|x| \leq \alpha$,
- $N \in \mathbb{N}$ pour que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \times \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x) \, dx \leq \varepsilon/2$ dès que $n \geq N$.

Alors, pour tout $n \geq N$, en remarquant que $\int_{\mathbb{R}} (T_n F_n)(x) \, dx = 1$ et que $T_n F_n(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) \, dx \right| &\leq \left| \int_{|x| \leq \alpha} h(x)(T_n F_n)(x) \, dx \right| + \left| \int_{|x| \geq \alpha} h(x)(T_n F_n)(x) \, dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \leq \alpha} (T_n F_n)(x) \, dx + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x) \, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) \, dx = 0$.

Si $h(0) \neq 0$, on remplace h par $h_0(x) = h(x) - h(0)$ et, par linéarité de l'intégrale,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) \, dx = h(0).$$

(13) (a) À l'aide de Cauchy-Schwarz :

$$m_2(f)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \, dx \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x) \, dx \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx}_{=1} \leq m_4(f).$$

(b) Procédons par récurrence sur n :

$$\begin{aligned} m_4(f_1 * f_2) &= \sum_{p=0}^4 \binom{4}{p} m_p(f_1) m_{4-p}(f_2) \\ &= \underbrace{m_4(f_1) m_0(f_2)}_{=m_4(f_1)} + \underbrace{m_0(f_1) m_4(f_2)}_{=m_4(f_2)} + 4 \underbrace{m_3(f_1) m_1(f_2) + m_1(f_1) m_3(f_2)}_{=0} + 6 m_2(f_1) m_2(f_2) \\ &= m_4(f_1) + m_4(f_2) + 6 m_2(f_1) m_2(f_2) \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie à l'ordre 2.

On suppose que cette relation est vérifiée à l'ordre n :

$$\begin{aligned} m_4(f_1 * \cdots * f_{n+1}) &= m_4[(f_1 * \cdots * f_n) * f_{n+1}] \\ &= m_4(f_1 * \cdots * f_n) + 6 m_2(f_1 * \cdots * f_n) m_2(f_{n+1}) + m_4(f_{n+1}) \end{aligned}$$

car \mathcal{F}_0 est stable par $*$ et qu'on a la propriété à l'ordre 2

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + m_4(f_{n+1}) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i) m_2(f_j) \\ &\quad + 6(m_2(f_1) + \cdots + m_2(f_n)) \times m_2(f_{n+1}) \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(c) Comme $m_2(f_i) \leq C$ et que la somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i) m_2(f_j)$ comporte $\frac{n(n-1)}{2}$

termes alors

$$m_4(F_n) \leq \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + 6C^2 \frac{n(n-1)}{2} \leq \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + 3C^2 n^2$$

puis on procède comme au **12.a** :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} T_n F_n(x) dx &\leq \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 (T_n F_n)(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha^4} m_4(T_n F_n) = \frac{1}{\alpha^4} \frac{1}{n^4} m_4(F_n). \end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{n \geq 1} \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx$ converge si, par exemple, $\sum_{i=1}^n m_4(f_i) = O(n^2) \dots$