

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE X MP 2011, MATHÉMATIQUES B

1. SUITES COMPLÈTEMENT MONOTONES

1a. Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'assertion (\mathcal{H}_p) :

”pour toute fonction f indéfiniment dérivable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et tout entier naturel n , il existe $x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$.”

(La suite (u_n) étant définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$).

- Soit f indéfiniment dérivable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$; d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $x \in]n, n+1[$ tel que $(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n) = f'(x)$: (\mathcal{H}_1) est donc vraie.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$; supposons (\mathcal{H}_p) vraie ; soit f indéfiniment dérivable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Définissons $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \geq 0, g(x) = f(x+1) - f(x)$, et la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = g(n)$, i.e. $v_n = (\Delta u)_n$. Alors g est indéfiniment dérivable, et en lui appliquant (\mathcal{H}_p) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p v)_n = g^{(p)}(y) = f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y).$$

On peut réappliquer l'égalité des accroissements finis à $f^{(p)}$ (indéfiniment dérivable), et il existe $x \in]y, y+1[\subset]n, n+p+1[$ tel que $f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y) = f^{(p+1)}(x)$. Il s'ensuit que (\mathcal{H}_{p+1}) est vraie, et le résultat requis s'en déduit par récurrence sur p .

1b. La suite (a_n) est associée à la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{x+1}$. f est indéfiniment dérivable, et une récurrence triviale montre que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$. En appliquant le **1a.**, il vient :

$$\forall p \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in]n, n+p[, (\Delta^p a)_n = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}.$$

Il s'ensuit que $(-1)^p (\Delta^p a)_n = \frac{p!}{(x+1)^{p+1}} > 0$. Comme de plus $\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^0 a)_n = a_n > 0$, il en découle que (a_n) est complètement monotone.

2a. Notons $T : E \rightarrow E$ défini par : $\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, (Tu)_n = u_{n+1}$. C'est un endomorphisme de E , et $\Delta = T - \text{Id}_E$. Comme T et Id_E commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \Delta^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} T^k.$$

D'où $\forall u \in E, \forall p \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$.

Remarque : La formule précédente est vraie aussi pour $p = 0$; observons de plus que, puisque $\forall k \in \mathbb{N}, (-1)^k = (-1)^{-k}$:

$$\forall p \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, (-1)^p (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k},$$

formule que je noterai (i).

2b. La formule (i) fournit $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p (\Delta^p b)_n = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} b^{n+k} = b^n (1-b)^p$ (en réappliquant le binôme de Newton au développement de $(1-b)^p$). Comme $b \in]0, 1[$, il s'ensuit que (b_n) est complètement monotone.

3a. Soit $N \in \mathbb{N}$; on a :

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^N (-t)^k \omega(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \omega(t) dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \omega(t) dt.$$

(Somme partielle d'une série géométrique de raison $-t \neq 1$.)

Notons $R_N = \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \omega(t) dt$, et soit $M = \sup_{t \in [0,1]} |\omega(t)|$ (bien défini, puisque ω est continue sur le segment $[0, 1]$). Comme pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$, il vient :

$$|R_N| \leq M \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{M}{N+2}.$$

Il en résulte que $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$: c'est dire que

$$\text{la série numérique } \sum (-1)^k u_k \text{ converge, et } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt.$$

3b. D'après la formule (i) (cf. **2.a**), et en utilisant les calculs effectués au **2.b** :

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p (\Delta^p u)_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} t^{n+k} dt = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t) dt.$$

Cependant $t \mapsto t^n (1-t)^p \omega(t)$ est continue, positive sur $[0, 1]$; il en découle que $(-1)^p (\Delta^p u)_n \geq 0$, et que si cette quantité était nulle, alors $\forall t \in [0, 1], t^n (1-t)^p \omega(t) = 0$. En particulier, on aurait $\forall t \in]0, 1[, \omega(t) = 0$ et par continuité : $\forall t \in [0, 1], \omega(t) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi : $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p (\Delta^p u)_n > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est complètement monotone.

3c. Pour tout $t \in [0, 1]$, on peut développer (puisque $0 \leq \frac{1-t}{2} \leq \frac{1}{2}$) :

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1-t}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p.$$

Définissons donc, pour $p \in \mathbb{N}$: $f_p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall t \in [0, 1], f_p(t) = \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)$. Chaque f_p est continue sur $[0, 1]$, et on a de plus : $\forall t \in [0, 1], |f_p(t)| \leq \frac{M}{2^p}$ (avec les notations du **3.a**). Ainsi, la série de fonctions continues $\sum f_p$ converge normalement sur $[0, 1]$, et on peut intervertir :

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t) dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 f_p(t) dt.$$

Compte-tenu du **3.a**, on a bien : $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) dt.$

Remarque : on peut traiter cette question comme au **3.a** en exprimant le reste de la série géométrique.

3.d Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient, en développant le binôme $(1-t)^p$ et d'après **2.a** :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) dt &= \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^1 t^k \omega(t) dt = \frac{(-1)^p}{2^p} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_k \\ &= \frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_0. \end{aligned}$$

D'où, d'après **3.c** :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.}$$

4. Appliquons ce qui précède à $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par : $\forall t \in [0, 1], \omega(t) = 1$ (qui vérifie bien les hypothèses du **3.**) ; ici :

- $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$,
- $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$,
- $\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) dt = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p dt = \frac{1}{(p+1)2^p}$ (effectuer le changement de variable $u = 1-t$).

D'après **3.a** et **3.c**, il vient :
$$\boxed{\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}.}$$

Remarque : La première égalité peut se déduire du développement

$$(D) : \forall t \in]-1, 1[, \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1},$$

et du fait que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0, 1]$ (majorer les restes en utilisant le critère spécial des séries alternées) : par continuité de $t \rightarrow \ln(1+t)$, (D) reste valable en 1. La seconde égalité revient à appliquer (D) en $\frac{-1}{2}$.

5a. Les calculs faits au **3.d** impliquent l'égalité requise.

5b. D'après ce qui précède (et, toujours, le **3d.**), on a :

$$|S - \mathcal{E}_n| = \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 \right| = \left| \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) dt \right|.$$

Or on a vu que la série de fonctions continues $\sum f_p$ (donc aussi, *a fortiori*, $\sum_{p \geq n+1} f_p$) convergeait normalement sur $[0, 1]$; il s'ensuit qu'on peut intervertir la série et l'intégrale, et, compte-tenu des calculs du **3.c** :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) dt \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{p=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) dt \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1} \frac{\omega(t)}{1+t} dt \right|. \end{aligned}$$

Enfin, puisque $\omega \geq 0$ et comme $\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{1-t}{2} \leq \frac{1}{2}$, on peut conclure :

$$\boxed{|S - \mathcal{E}_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt = \frac{S}{2^{n+1}}.}$$

2. TRANSFORMÉE D'EULER

6a. La série $\sum(-1)^n u_n$ converge, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+k} = 0$. Or, p étant fixé, le 2.a fournit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$. D'où $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\Delta^p u)_n = 0}$.

6b. La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc est bornée : notons $R = \sup_{n \in \mathbb{N}} |r_n|$.

Soit $\varepsilon > 0$; comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $|r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $p \geq N_1$, comme $\frac{1}{2^p} \sum_{k=N_1}^p \binom{p}{k} \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = 1$:

$$\left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} r_k \right| \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} |r_k| \leq \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} + \frac{1}{2^p} \sum_{k=N_1}^p \binom{p}{k} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, N_1 étant fixé, la fonction $p \mapsto \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k}$ est polynomiale en p (écrire $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} = 0$. Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N_2$, $\left| \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour tout $p \geq \max(N_1, N_2)$, $\left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} r_k \right| \leq \varepsilon$, et $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} r_k = 0}$.

7a. Soit $N \in \mathbb{N}$; notons

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{p=0}^N \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right] = \frac{(-1)^0}{2^0} (\Delta^0 u)_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n \\ &= u_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n. \end{aligned}$$

Le **2a.** permet d'écrire $\frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = \frac{(-1)^n}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (-1)^{n+k} u_{n+k}$. Or on vient de voir au **6a.** que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$: le **6b.** appliqué à la suite $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fournit alors

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = 0$; on en déduit que $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = u_n$, c'est-à-dire que la série

$\sum_{p \geq 0} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right]$ converge, et $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right] = u_n}$.

7b. Notons, pour simplifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (\Delta^p u)_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; notons également

$$\mathcal{U}_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n (2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1} u)_n) = \sum_{n=0}^N (-1)^n (2w_n + (\Delta w)_n).$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $2w_n + (\Delta w)_n = w_{n+1} + w_n$, on a :

$$\mathcal{U}_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n w_{n+1} + \sum_{n=0}^N (-1)^n w_n = \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} w_n + \sum_{n=0}^N (-1)^n w_n = (-1)^N w_{N+1} + w_0.$$

Or, p étant fixé, le **6a.** montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_N = w_0 = (\Delta^p u)_0$. Il s'ensuit que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right)$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right) = \frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_0.}$$

8a. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \sum_{p=0}^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(u_k - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (\Delta^{n+1} u)_k \right). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge, ce qui précède montre que $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (\Delta^{n+1} u)_k$ aussi, et, d'après

2a. :

$$\begin{aligned} E_n - S &= \frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n+1+k} (\Delta^{n+1} u)_k = \frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^{k+p} \binom{n+1}{p} u_{k+p} \\ &= \boxed{\frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k.} \end{aligned}$$

8b. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$; en tant que reste d'une série convergente, on

a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. On peut alors appliquer le **6b.** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} R_p = 0$, d'où aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n - S = 0, \text{ i.e. } \boxed{S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.}$$

3. UNE AMÉLIORATION DE LA MÉTHODE

9a. On a vu au **3a.** que $S = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt$, d'où, comme $P_n(-1) \neq 0$:

$$T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t} \omega(t) dt = S - \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)} \omega(t) dt$$

$$\text{et } \boxed{S - T_n = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)} \omega(t) dt.}$$

9b. ω étant positive, pour $M_n = \sup_{t \in [0,1]} |P_n(t)|$, on a

$$\boxed{|S - T_n| \leq M_n \int_0^1 \frac{\omega(t)}{|P_n(-1)|(1+t)} dt = \frac{SM_n}{|P_n(-1)|}.}$$

Remarque : Il faut ne pas lire ces questions pour ne pas y répondre ; les deux questions suivantes satisfont d'ailleurs la même condition nécessaire.

10. Ici, immédiatement : $P_n(-1) = 2^n$ et $M_n = 1$, d'où $|S - T_n| \leq \frac{S}{2^n}$.

11. Ici $P_n(-1) = 3^n$, et comme $\forall t \in [0, 1], -1 \leq 1 - 2t \leq 1$ et 1 est atteint pour $t = 0$: $M_n = 1$, et $|S - T_n| \leq \frac{S}{3^n}$.

12a. Développons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(2nt) &= \Re[\exp(2int)] = \Re[(\cos(t) + i \sin(t))^{2n}] = \Re \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (i \sin(t))^k (\cos(t))^{2n-k} \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{2n}{2l} (-1)^l \sin^{2l}(t) \cos^{2n-2l}(t) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{2n}{2l} \sin^{2l}(t) (\sin^2(t) - 1)^{n-l}. \end{aligned}$$

Définissons donc $P_n(X) = (-1)^n \sum_{l=0}^n \binom{2n}{2l} X^l (X-1)^{n-l}$.

• P_n est un polynôme de degré *a priori* $\leq n$, et comme le coefficient en X^n vaut $(-1)^n \sum_{l=0}^n \binom{2n}{2l} \neq 0$ (car $\forall l \in [0, n] \binom{2n}{2l} > 0$), on a bien $\deg P_n = n$.

• En outre, par définition et d'après les calculs précédents : $\forall t \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt)$ (relation notée (ii)).

• Enfin, soit Q_n un autre polynôme vérifiant (ii) ; \sin^2 étant surjective de \mathbb{R} dans $[0, 1]$, les deux polynômes Q_n et P_n coïncident sur la partie infinie $[0, 1]$, donc sont égaux : d'où l'unicité de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation (ii).

Remarque : on peut aussi exploiter la relation de récurrence

$$P_n(X) = 2(1 - 2X)P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$$

qui nous donne la réponse directement et permet aussi de traiter plus simplement la question suivante.

12b. Par définition :

$$P_n(-1) = (-1)^n \sum_{l=0}^n \binom{2n}{2l} (-1)^l (-2)^{n-l} = \sum_{l=0}^n \binom{2n}{2l} 2^{n-l} = \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} (\sqrt{2})^{2p}$$

(en posant $p = n - l$, et compte-tenu de $\binom{2n}{2l} = \binom{2n}{2n-2l}$).

Posons $a_n = P_n(-1) = \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} (\sqrt{2})^{2p}$, et $b_n = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{2p+1} (\sqrt{2})^{2p+1}$; il vient :

- $a_n + b_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\sqrt{2})^k = (1 + \sqrt{2})^{2n}$,
- $a_n - b_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-\sqrt{2})^k = (1 - \sqrt{2})^{2n} = (\sqrt{2} - 1)^{2n}$.

D'où $P_n(-1) = \frac{1}{2}[(1 + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{2} - 1)^{2n}]$.

12c. \sin^2 étant (une fois de plus) surjective de \mathbb{R} sur $[0, 1]$:

$$\forall x \in [0, 1], \exists t \in \mathbb{R}, P_n(x) = P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt).$$

D'où $|M_n| \leq 1$ (on a même $M_n = 1$, atteint pour $x = 0$), et

$$|S - T_n| \leq \frac{2S}{[(1 + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{2} - 1)^{2n}]}.$$

4. COMPARAISON DES MÉTHODES SUR UN EXEMPLE

13. Question ouverte, et intéressante ;

notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $R_{1,n} = S - S_n$, $R_{2,n} = S - E_n$, $R_{3,n} = S - T_n$.

• On peut écrire, d'après le calcul effectué au **3a.** et en posant $u = t^{n+1}$, qui définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, 1]$ sur $]0, 1]$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{1+u^{\frac{1}{n+1}}} du.$$

Formons alors $g_n :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$ définie par : $\forall u \in]0, 1], g_n(u) = \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{1+u^{\frac{1}{n+1}}}$. C'est une suite de fonctions continues et intégrables sur $]0, 1]$, qui converge simplement vers la fonction constante $\frac{1}{2}$, et telle que $\forall (n, u) \in \mathbb{N} \times]0, 1] : |g_n(u)| \leq 1$, fonction constante intégrable sur $]0, 1]$. Le théorème de

convergence dominée s'applique, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(u) du = \frac{1}{2}$. D'où $R_{1,n} = S - S_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$.

• La même idée peut être appliquée à $R_{2,n} = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{1+t} dt$ (cf. **5b.**). On a, en posant $v = (1-t)^{n+1}$ (\mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, 1[$ sur $]0, 1]$) :

$$R_{2,n} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \int_0^1 \frac{v^{\frac{1}{n+1}}}{2-v^{\frac{1}{n+1}}} dv.$$

On forme, de même, $h_n :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$ définie par $\forall v \in]0, 1], h_n(v) = \frac{v^{\frac{1}{n+1}}}{2-v^{\frac{1}{n+1}}}$:

(h_n) est une suite de fonctions continues intégrables sur $]0, 1]$, qui converge simplement vers 1, et telle que $\forall (n, v) \in \mathbb{N} \times]0, 1], |h_n(v)| \leq 1$. D'après le théorème de convergence dominée :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(v) dv = 1$, et donc $R_{2,n} = S - E_n \sim \frac{1}{n2^{n+1}}$.

• Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1 < \sqrt{2} + 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} - 1)^{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} + 1)^{2n} = +\infty$;
de plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n2^{n+1}}{(\sqrt{2} + 1)^{2n}} = 0$. Il s'ensuit, en utilisant **12c.** et ce qui précède, que

$$|S - T_n| \leq \frac{2S}{[(1 + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{2} - 1)^{2n}]} \sim \frac{2S}{(1 + \sqrt{2})^{2n}} = o(S - E_n).$$

(T_n) converge donc plus rapidement que (S_n) ou (E_n) .

• Reste à obtenir un équivalent de $S - T_n$; pour ce faire, on écrit, en posant $t = \sin^2 u$ (\mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, 1[$), puis $v = 2u$:

$$\begin{aligned} P_n(-1)(S - T_n) &= \int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(2nu) \sin(u) \cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{\cos(2nu) \sin(2u)}{3 - \cos(2u)} du = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nv) \sin(v)}{3 - \cos(v)} dv. \end{aligned}$$

On forme enfin $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall v \in [0, \pi], F(v) = \frac{\sin(v)}{3 - \cos(v)}$. F est \mathcal{C}^∞ sur $[0, \pi]$, et, en effectuant une triple intégration par parties, $\forall n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(nv)F(v) \, dv &= \left[\frac{\sin(nv)F(v)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nv)F'(v)}{n} \, dv = - \int_0^\pi \frac{\sin(nv)F'(v)}{n} \, dv \\
&= \left[\frac{\cos(nv)F'(v)}{n^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(nv)F''(v)}{n^2} \, dv \\
&= \left[\frac{\cos(nv)F'(v)}{n^2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin(nv)F^{(3)}(v)}{n^3} \, dv.
\end{aligned}$$

Cependant $\forall v \in [0, \pi] : F'(v) = \frac{3 \cos(v) - 1}{(3 - \cos(v))^2}$, et $\left[\frac{\cos(nv)F'(v)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^n F'(\pi) - F'(0)}{n^2} = -\frac{2 + (-1)^n}{4n^2}$. En outre, en notant $M_3 = \sup_{v \in [0, \pi]} |F^{(3)}(v)|$, on a $\left| \int_0^\pi \frac{\sin(nv)F^{(3)}(v)}{n^3} \, dv \right| \leq \frac{\pi M_3}{n^3} = o\left(\frac{2 + (-1)^n}{4n^2}\right)$,

d'où finalement
$$S - T_n \sim -P_n(-1) \frac{2 + (-1)^n}{4n^2} \sim -\frac{2 + (-1)^n}{2n^2(\sqrt{2} + 1)^{2n}}.$$

Pour toute remarque ou suggestion concernant ce corrigé, contacter denis.favennec@prepas.org.