# SPÉCIALE MP* : DEVOIR DE VACANCES...

Soit $E$ l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$) et $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n. Dans tout le problème, on identifie les matrices colonnes à $n$ coefficients complexes aux éléments de $E$ et on considère les matrices lignes à $n$ coefficients complexes comme les transposées des éléments de $E$. Ainsi, pour $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$, $x \in E$ et $y \in E$, de transposée $y^{\mathrm{T}}$, la multiplication usuelle des matrices rectangulaires ou carrées permet de considérer les produits

$$AB \in \mathcal{M}, \quad Ax \in E, \quad xy^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}$$

ainsi que la matrice ligne $y^{\mathrm{T}}B$ et le produit $y^{\mathrm{T}}x$, matrice à un seul coefficient. La matrice unité pour la multiplication dans $\mathcal{M}$ est notée $I$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}$, le rang, la trace et le déterminant de $A$ sont respectivement notés $\operatorname{Rg} A$, $\operatorname{Tr} A$ et $\det A$ ; le spectre de $A$, c'est-à-dire la famille de ses valeurs propres, *comptées chacune avec son ordre de multiplicité*, est noté $\operatorname{Sp} A$.

Enfin, on envisagera des endomorphismes $\Gamma$, $\Phi$, $\Phi'$, $\Psi$ de l'*espace vectoriel* complexe $\mathcal{M}$ ; on souligne que la multiplication des matrices dans $\mathcal{M}$ n'intervient pas dans la définition de tels endomorphismes, c'est-à-dire que $\Gamma(AB)$, par exemple, peut être différent de $\Gamma(A)\Gamma(B)$.

## Partie I

On considère l'endomorphisme $\Gamma$ de $\mathcal{M}$ défini par

$$\Gamma(X) = -X + \operatorname{Tr}(X)I$$

pour tout $X \in \mathcal{M}$.

**I.1.** Quels sont les valeurs propres de $\Gamma$, les sous-espaces propres associés et leurs dimensions ?

**I.2.** L'endomorphisme $\Gamma$ est-il diagonalisable ? Trouver un polynôme du second degré annulé par $\Gamma$. Donner la valeur explicite de $\Gamma^{-1}$ en fonction de $\mathcal{I}$ l'identité de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et de $\Gamma$.

**I.3.** Si $n \geqslant 3$ et $\operatorname{Rg} X = n$, distinguer, d'après une condition liant $\operatorname{Tr} X$ et $\operatorname{Sp} X$ le cas où $\operatorname{Rg} X = \operatorname{Rg} \Gamma(X)$ du cas où $\operatorname{Rg} X \neq \operatorname{Rg} \Gamma(X)$.

**I.4.** On suppose dans cette question que $n = 2$.

**a.** Si $n = 2$, que penser de $\Gamma^{-1}$ ? Montrer que $X$ et $\Gamma(X)$ ont même polynôme caractéristique puis que

$$\operatorname{Rg} \Gamma(X) = \operatorname{Rg} X,\ \det \Gamma(X) = \det X,\ \operatorname{Sp} \Gamma(X) = \operatorname{Sp} X.$$

**b.** Trouver les matrices unitaires (i.e. $AA^* = I$ où $A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$) de déterminant 1 telles que, pour tout $X \in \mathcal{M}$,

$$\Gamma(X) = AX^{\mathrm{T}}A^*.$$

## Partie II

Dans toute cette partie, $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}$ qui conserve le rang, c'est-à-dire tel que $\operatorname{Rg} \Phi(X) = \operatorname{Rg} X$ pour tout $X$ de $\mathcal{M}$.

**II.1.** **a.** Montrer que $A \in \mathcal{M}$ est une matrice de rang 1 ssi il existe $x$ et $y$ des éléments non nuls de $E$ tels que

$$A = xy^{\mathrm{T}}.$$

Préciser alors l'image de $A$, son noyau. En déduire les seules écritures possibles pour une telle matrice en fonction de $x$ et $y$.

**b.** Montrer que $A \in \mathcal{M}$ est une matrice de rang 2 ssi il existe $x$, $y$, $z$, $w$ quatre éléments de $E$ tels que

$$(x,z) \text{ libre}, \ (y,w) \text{ libre et } A = xy^{\mathrm{T}} + zw^{\mathrm{T}}.$$

**II.2.** **a.** Soient $x$ et $y$ deux éléments non nuls de $E$. Vérifier qu'il existe deux éléments $p$, $q$ de $E$ tels que

$$\Phi(xy^{\mathrm{T}}) = pq^{\mathrm{T}}.$$

Pour $x$ et $y$ fixés, le couple $(p,q)$ est-il unique ?

**b.** On fixe $y_0$ non nul dans $E$ et on fait l'hypothèse suivante

$$(\mathrm{H}_1) \qquad \exists (x_1,x_2) \in (E \setminus \{0\})^2, \ \exists (p_1,p_2) \in E^2 \text{ libre }, \ \exists (q_1,q_2) \in E^2 \mid \begin{cases} \Phi(x_1 y_0^{\mathrm{T}}) = p_1 q_1^{\mathrm{T}} \\ \Phi(x_2 y_0^{\mathrm{T}}) = p_2 q_2^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

En considérant $\Phi((x_1+x_2)y_0^{\mathrm{T}})$, montrer que $q_1$ et $q_2$ sont liés.
Prouver alors que l'on peut choisir un élément fixe $q_0 \neq 0$ dans $E$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $p \in E$ vérifiant

$$\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = pq_0^{\mathrm{T}}.$$

**c.** Avec les hypothèses $\mathrm{H}_1$, établir l'existence d'une matrice inversible $A \in \mathcal{M}$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = Axq_0^{\mathrm{T}}.$$

**II.3.** L'élément $y_0 \neq 0$ étant toujours fixé dans $E$, on fait l'hypothèse suivante

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \forall (x_1,x_2) \in (E \setminus \{0\})^2, \ \exists (p_1,p_2) \in E^2 \text{ liée }, \ \exists (q_1,q_2) \in E^2 \mid \begin{cases} \Phi(x_1 y_0^{\mathrm{T}}) = p_1 q_1^{\mathrm{T}} \\ \Phi(x_2 y_0^{\mathrm{T}}) = p_2 q_2^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

Montrer que l'on peut choisir un élément fixe $p_0 \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $q \in E$ vérifiant

$$\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = p_0 q^{\mathrm{T}}$$

et en déduire qu'il existe une matrice inversible $B \in \mathcal{M}$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = p_0 x^{\mathrm{T}} B.$$

**II.4.** Afin de confronter entre elles les deux hypothèses $\mathrm{H}_1$ et $\mathrm{H}_2$, on fait l'hypothèse suivante :

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{array}{c} \exists (y_0,y_0') \in (E \setminus \{0\})^2, \ \exists (A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2, \ \exists (p_0,q_0) \in E^2 \mid \\ \forall x \in E, \ \Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = Axq_0^{\mathrm{T}} \text{ et } \Phi(xy_0'^{\mathrm{T}}) = p_0 x^{\mathrm{T}} B. \end{array}$$

**a.** Montrer que $y_0$ et $y_0'$ sont linéairement indépendants.

**b.** En choisissant $x = A^{-1}p_0$ et $x'$ linéairement indépendant de $x$, étudier le rang de $\Phi(xy_0^{\mathrm{T}} + x'y_0'^{\mathrm{T}})$ et en conclure que l'hypothèse (H) est inacceptable.

**II.5.** On suppose, dans cette question, comme dans les questions **II.2.b** et **II.2.c**, qu'il existe un élément non nul $y_0 \in E$, une matrice inversible $A \in \mathcal{M}$ et un élément $q_0 \in E$ tels que, pour tout $x \in E$,

$$\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = Axq_0^{\mathrm{T}}.$$

**a.** Soit $y$ un élément de $E$ linéairement indépendant de $y_0$. Établir l'existence d'une matrice inversible $A_1$ et d'un élément $q \in E$, non colinéaire à $q_0$, tels que l'on ait

$$\Phi(xy^{\mathrm{T}}) = A_1 x q^{\mathrm{T}}$$

pour tout $x \in E$. Pour $y$ fixé, le choix de $A_1$ est-il unique ?

**b.** Montrer que l'on peut choisir $A_1 = A$. En déduire qu'il existe une matrice inversible $B \in \mathcal{M}$ telle que, pour tout couple $(x, y) \in E^2$,

$$\Phi(xy^{\mathrm{T}}) = Axy^{\mathrm{T}}B.$$

**c.** Donner pour tout $X \in \mathcal{M}$, la valeur explicite de $\Phi(X)$.

**II.6.** On suppose, dans cette question, comme dans la question **II.3**, qu'il existe un élément $y_0$ non nul dans $E$, une matrice inversible $B \in \mathcal{M}$ et un élément $p_0 \in E$ tels que

$$\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = p_0 x^{\mathrm{T}} B$$

pour tout $x \in E$.

**a.** Vérifier que l'application $\Phi'$ définie sur $\mathcal{M}$ par $\Phi'(X) = [\Phi(X)]^{\mathrm{T}}$ est un endomorphisme qui conserve le rang. En donner la valeur explicite pour $X = xy_0^{\mathrm{T}}$, puis pour $X = xy^{\mathrm{T}}$ pour tout $y \in E$, puis pour $X$ quelconque dans $\mathcal{M}$.

**b.** En déduire la valeur explicite de $\Phi(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}$.

## Partie III

**III.1.** Dans cette question, $\Psi$ désigne un endomorphisme de $\mathcal{M}$ qui conserve le déterminant, c'est-à-dire tel que, pour tout $X \in \mathcal{M}$, $\det \Psi(X) = \det X$.

Soient $r$ le rang de $X \in \mathcal{M}$, $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (où $I_r$ désigne la matrice identité d'ordre $r$) et $K = I - J_r$. On écrit $X = PJ_rQ$ et on note $Y = PKQ$ où $P$ et $Q$ sont inversibles.

**a.** Montrer que $\det(\rho X + Y)$ est, en fonction de $\rho$, un monôme dont on précisera le degré.

**b.** Soit $s$ le rang de $\Psi(X)$, montrer que $\det(\rho\Psi(X) + \Psi(Y))$ est un polynôme en $\rho$ dont on comparera le degré à $s$. Comparer $r$ à $s$. Montrer que $\Psi$ est inversible.

**c.** Montrer que $\Psi$ conserve le rang. En déduire, pour tout $X \in \mathcal{M}$, les deux expressions possibles de $\Psi(X)$.

**III.2.** Dans cette question, $\Psi$ désigne un endomorphisme de $\mathcal{M}$ qui conserve le spectre, c'est-à-dire tel que, pour tout $X \in \mathcal{M}$,

$$\operatorname{Sp} \Psi(X) = \operatorname{Sp} X.$$

**a.** En posant $G = [\Psi(I)]^{-1}$, comparer $\det(\rho I - G\psi(X))$ à $\det(\rho I - X)$ pour tout $\rho \in \mathbb{C}$ et tout $X \in \mathcal{M}$. En déduire l'égalité

$$\operatorname{Sp}(GX) = \operatorname{Sp} X.$$

**b.** Montrer que $G = I$. En déduire les expressions possibles de $\Psi(X)$.