SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

PARTIE I $\boxed{22}$

I.1. $\Gamma(X) = \lambda X \Leftrightarrow (\lambda+1)X = \mathrm{Tr}(X).I$ d'où les deux cas :

- $\lambda = -1 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(X) = 0$ et le sous-espace propre associé est de dimension $n^2 - 1$ (c'est un hyperplan). .... $\boxed{3}$
- $\lambda \neq -1 \Leftrightarrow (\lambda+1)\,\mathrm{Tr}(X) = n\,\mathrm{Tr}(X)$ et $\mathrm{Tr}(X) \neq 0$ ($X \neq 0$ et le cas $\mathrm{Tr}(X) = 0$ a été traité). On a donc $\lambda = n-1$ et le sous-espace propre associé est de dimension 1. $\boxed{2}$

I.2. $\mathcal{M}$ est somme directe de ses sous-espaces propres donc Γ est diagonalisable. .... $\boxed{2}$
Si l'on écrit Γ dans une base de vecteurs propres alors on vérifie que

$$\Gamma^2 - (n-2)\Gamma - (n-1)\,\mathrm{Id} = 0. \qquad \boxed{2}$$

et on tire directement de cette relation la valeur de Γ^{-1} :

$$\Gamma(\Gamma - (n-2)\,\mathrm{Id}) = (n-1)\,\mathrm{Id} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{\Gamma - (n-2)\,\mathrm{Id}}{n-1}$$

soit $\Gamma^{-1}(X) = \dfrac{\Gamma(X) - (n-2)X}{n-1}$ (on a aussi $\Gamma^{-1}(X) = -X + \dfrac{\mathrm{Tr}(X)}{n-1}I$). .... $\boxed{1}$

I.3. On a $\mathrm{Rg}(\Gamma(X)) = n \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(X) \notin \mathrm{Sp}(X)$. .... $\boxed{3}$

I.4. a. Si $n = 2$ alors $\Gamma^{-1} = \Gamma$. .... $\boxed{1}$

Si $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors $\Gamma(X) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ donc X et $\Gamma(X)$ ont même polynôme caractéristique. .... $\boxed{2}$

Conclusion : $\mathrm{Rg}\,\Gamma(X) = \mathrm{Rg}\,X$ (Γ bij.), $\det\Gamma(X) = \det X$ et $\mathrm{Sp}\,\Gamma(X) = \mathrm{Sp}\,X$. ... $\boxed{2}$

b. Pour terminer, une question calculatoire : soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ alors, avec $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et après calcul, on trouve que $\Gamma(X) = AX^{\mathrm{T}}A^*$ est équivalent à

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \ : \begin{cases} \alpha\overline{\alpha}a + \beta\overline{\alpha}b + \alpha\overline{\beta}c + \beta\overline{\beta}d & = d \\ \alpha\overline{\gamma}a + \beta\overline{\gamma}b + \alpha\overline{\delta}c + \beta\overline{\delta}d & = -c \\ \gamma\overline{\alpha}a + \delta\overline{\alpha}b + \gamma\overline{\beta}c + \delta\overline{\beta}d & = -b \\ \gamma\overline{\gamma}a + \delta\overline{\gamma}b + \gamma\overline{\delta}c + \delta\overline{\delta}d & = a \end{cases}$$

ce qui est encore équivalent à $\alpha = \delta = 0$, $\beta\overline{\gamma} = -1$ et en tenant compte du fait que $\det A = 1$ et A unitaire, on obtient $\beta\gamma = -1$ et $|\beta| = |\gamma| = 1$ d'où les seules matrices recherchées $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = -A_1$ (la vérification est immédiate). .... $\boxed{4}$

Remarque : On aurait pu commencer par là et conclure directement...

PARTIE II $\boxed{46}$

II.1. a. Si $\mathrm{Rg}(X) = 1$ alors il existe une colonne C_j non nulle et toutes les autres sont proportionnelles à C_j donc $\forall i \in [1,n]$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $C_i = \lambda_i C_j$. On pose alors $x = C_j$ et $y = (\lambda_i)$. $x \neq 0$ par hypothèse et $y \neq 0$ car $\lambda_j = 1$.
La réciproque est immédiate. .... $\boxed{2}$

On a $Az = xy^{\mathrm{T}}z = \lambda x$ en posant $\lambda = y^{\mathrm{T}}z$ par conséquent $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(x)$. Ensuite $\operatorname{Ker} A = \{z \in E \mid y^{\mathrm{T}}z = 0\}$. .... $\boxed{2}$

Si $A = xy^{\mathrm{T}} = x'y'^{\mathrm{T}} = A'$ alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A'$ donc $\operatorname{Vect}(x) = \operatorname{Vect}(x')$ i.e. $x = \alpha x'$ et $y' = \alpha y$. .... $\boxed{2}$

b. Là, il existe C_j et C_k deux colonnes linéairement indépendantes et toutes les autres sont combinaison linéaire de ces deux. Donc $\forall i \in [1, n]$, $\exists(\lambda_i, \mu_i) \in \mathbb{C}^2$ tel que $C_i = \lambda_i C_j + \mu_i C_k$.

On pose $x = C_j$, $z = C_k$, $y = (\lambda_i)$, $w = (\mu_i)$. x et z sont linéairement indépendants par hypothèse, $\lambda_j = 1$, $\mu_j = 0$ et $\lambda_k = 0$, $\mu_k = 1$ permet d'assurer l'indépendance linéaire de y et w. .... $\boxed{2}$

Réciproquement : soit $U = [x\ z\ x_3 \dots x_n]$ de rang n et $V = \begin{pmatrix} y^{\mathrm{T}} \\ w^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de rang n alors $A = UJ_2V$ et $\operatorname{Rg} A = 2$. .... $\boxed{2}$

Remarque : on pouvait traiter directement cette question (et de la même manière la question précédente) en écrivant que

$$\operatorname{Rg}(A) = 2 \Leftrightarrow \exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A = P \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

II.2. a. Comme Φ conserve le rang et $\operatorname{Rg}(xy^{\mathrm{T}}) = 1$ alors $\operatorname{Rg}(\Phi(xy^{\mathrm{T}})) = 1$ donc il existe $(p, q) \in E^2$ tel que $\Phi(xy^{\mathrm{T}}) = pq^{\mathrm{T}}$. .... $\boxed{1}$

Il n'y a pas unicité car si $\lambda \neq 0$ alors $(\lambda p)\left(\dfrac{1}{\lambda} q^{\mathrm{T}}\right) = pq^{\mathrm{T}}$. .... $\boxed{1}$

b. $(x_1 + x_2)y_0^{\mathrm{T}}$ est de rang $\leqslant 1$ et $\Phi\left[(x_1 + x_2)y_0^{\mathrm{T}}\right] = p_1 q_1^{\mathrm{T}} + p_2 q_2^{\mathrm{T}}$. Si q_1 et q_2 étaient linéairement indépendants alors $\operatorname{Rg}(p_1 q_1^{\mathrm{T}} + p_2 q_2^{\mathrm{T}}) = 2$ ce qui est impossible donc q_1 et q_2 sont liés. .... $\boxed{1}$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = pq^{\mathrm{T}}$.

- Si p et p_1 sont libres alors $q = \lambda q_1$ (sinon $\operatorname{Rg}[\Phi((x + x_1)y_0^{\mathrm{T}})] = 2$ impossible).
- Si p et p_1 sont liés alors p et p_2 sont libres et donc $q = \lambda q_2$. Or $q_2 = \mu q_1$ donc $q = \lambda\mu q_0$.

Dans les deux cas, on peut choisir $q_0 = q_1$. .... $\boxed{4}$

c. Le vecteur p dépendant de x est unique car si p' est un autre vecteur convenant alors $(p - p')q_0^{\mathrm{T}} = 0$ donc $p = p'$ (en appliquant le **II.1.a**). L'application $x \mapsto p$ est alors évidemment linéaire donc il existe une matrice A telle que $\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = Axq_0^{\mathrm{T}}$. ..... $\boxed{2}$

Si $x \neq 0$, on a vu que $Ax \neq 0$ donc A est injective donc inversible. .... $\boxed{2}$

II.3. Soit p_0 associé à x_0, si $\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = pq'^{\mathrm{T}}$ et $p = \lambda p_0$ alors on obtient $\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = p_0 q^{\mathrm{T}}$ en posant $q = \lambda q'$. .... $\boxed{1}$

Comme au **II.2.a**, q est unique, $x \mapsto q$ est une application linéaire et $q = 0 \Rightarrow x = 0$ donc il existe B inversible telle que $\Phi(xy_0^{\mathrm{T}}) = p_0 x^{\mathrm{T}} B$. .... $\boxed{2}$

II.4. a. Par l'absurde, on suppose que y_0 et y_0' sont linéairement indépendants i.e. $y_0' = \lambda y_0$. Quitte à remplacer B par $\dfrac{1}{\lambda}B$, on aura alors

$$Axq_0^{\mathrm{T}} = p_0 x^{\mathrm{T}} B$$

donc $Ax = \lambda p_0$ et $B^T x = \dfrac{1}{\lambda} q_0$ en vertu du **II.1.a** i.e. $\operatorname{Rg} A \leqslant 1$ ce qui est impossible car $n \geqslant 2$ et $\operatorname{Rg} A = n$. 5

b. $\operatorname{Rg}(\Phi(xy_0^T + x'{y'}_0^T)) = 2$ et

$$\begin{aligned}\Phi(xy_0^T + x'{y'}_0^T) &= Axq_0^T + p_0{x'}^T B \\ &= p_0 q_0^T + p_0 {x'}^T B \\ &= p_0(q_0^T + {x'}^T B)\end{aligned}$$

qui est de rang 1 donc l'hypothèse H est inacceptable. 2

II.5. a. D'après la question **II.4**, on est, pour tout y, dans le cas de la question **II.2** donc on peut écrire

$$\Phi(xy^T) = A_1 x q^T. \qquad 2$$

Si (x, x') est une famille libre alors $\operatorname{Rg}\left(\Phi(xy_0^T + x'y^T)\right) = 2$ (cf. question **II.1.b**) or $\Phi(xy_0^T + x'y^T) = Axq_0^T + Ax'q^T$ est de rang 1 si (q_0, q) est liée donc (q_0, q) est nécessairement libre. 2

Le choix de A_1 n'est pas unique (on remplace q par $\dfrac{q}{\lambda}$ et A_1 par λA_1). 1

b. Comme $\Phi\left[x(y_0 + y)^T\right] = Axq_0^T + A_1 x q^T$, pour tout $x \neq 0$, $\operatorname{Rg}\left(Axq_0^T + A_1 x q^T\right) = 1$ et, comme (q_0, q) est libre, alors, vu le **II.1.b**, Ax et $A_1 x$ sont liés soit x et $A^{-1}A_1 x$ sont liés. $A^{-1}A_1$ est une homothétie et donc on peut choisir $A_1 = A$. 4

Le vecteur q est alors unique (même chose qu'en **II.2.c**) et l'application $y \mapsto q$ est linéaire donc il existe B (inversible comme au **II.2.c**) telle que $q = B^T y$ d'où

$$\Phi(xy^T) = Axy^T B$$

où A et B sont deux matrices inversibles. 1

c. Soit $X \in \mathcal{M}$ alors, si on pose $x_1 = C_1, \ldots, x_n = C_n$ (où les C_i sont les colonnes de X) et $(y_1, \ldots, y_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ alors $X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^T$ donc

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i y_i^T) = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^T\right) B = AXB. \qquad 3$$

II.6. a. $\operatorname{Rg}(\Phi'(X)) = \operatorname{Rg}(\Phi(X))$ donc Φ' conserve le rang. 1

Ensuite $\Phi'(X) = B^T x p_0^T$, on se retrouve dans le cas de la question **II.5** et on en retrouve les conclusions : $\Phi'(X) = B^T X A^T$. 2

b. On a donc $\Phi(X) = AX^T B$ (d'où deux formes possibles pour une application Φ conservant le rang $\Phi(X) = \begin{cases} AX^T B \\ AXB \end{cases}$ 1

Partie III 21

III.1. a. On a $\begin{cases} X = PJ_rQ \\ Y = PKQ \end{cases}$ donc $\rho X + Y = P(\rho J_r + K)Q$ d'où

$$\det(\rho X + Y) = \det P \det Q \det(\rho J_r + K) = A\rho^r. \qquad 2$$

b. On sait que $\Psi(X) = P'J_sQ'$, on pose aussi $\Psi(Y) = P'K'Q'$ d'où

$$\det(\rho\Psi(X) + \Psi(Y)) = \det P' \det Q' \begin{vmatrix} \rho+\alpha_{11} & & & \\ & \ddots & & K_1 \\ & & \rho+\alpha_{ss} & \\ & K_2 & & K_3 \end{vmatrix}$$

qui est un polynôme de degré $\leqslant s$. .... $\boxed{2}$

Or $\det(\rho\Psi(X) + \Psi(Y)) = \det(\Psi(\rho X + Y)) = A\rho^r$ donc $r \leqslant s$. .... $\boxed{1}$

Si $s = 0$ alors $r = 0$ donc Ψ est injective et comme on est en dimension finie, Ψ est bijective. .... $\boxed{2}$

c. Ψ^{-1} conserve aussi le déterminant. Or, on vient de voir que $\mathrm{Rg}(\Psi(X)) \geqslant \mathrm{Rg}(X)$, on a aussi $\mathrm{Rg}(\Psi^{-1}(X)) \geqslant \mathrm{Rg}(X)$ d'où l'égalité $\mathrm{Rg}(\Psi(X)) = \mathrm{Rg}(X)$. .... $\boxed{3}$

Vu les résultats de la partie II, on a donc

$$\Psi(X) = \begin{cases} AXB \\ \text{ou} \\ AX^{\mathrm{T}}B \end{cases} \quad \text{avec } \det A \det B = 1. \qquad \boxed{1}$$

III.2. On remarque tout de suite que, si Ψ conserve le spectre, alors Ψ conserve le rang et le déterminant.

a. On a $\det(\rho I - G\Psi(X)) = \det G.\det(\rho\Psi(I) - \Psi(X)) = \det G.\det(\rho I - X)$ .... $\boxed{2}$

d'où, en posant $Y = \Psi(X)$,

$$\mathrm{Sp}(G\Psi(X)) = \mathrm{Sp}(GY) = \mathrm{Sp}(X) = \mathrm{Sp}(Y)$$

et comme Ψ est bijective, ceci est réalisé pour tout Y de $\mathcal{M}$. .... $\boxed{3}$

b. Avec $X = I$ on obtient $\mathrm{Sp}(G) = \{1\}$, G est donc semblable à $H = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. En posant $G = PHP^{-1}$ et $X = P^{-1}YP$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(GY) &= \mathrm{Sp}(PHP^{-1}Y) \\ &= \mathrm{Sp}(PHXP^{-1}) = \mathrm{Sp}(HX) \end{aligned}$$

(le spectre de deux matrices semblables est le même)

$$= \mathrm{Sp}\, Y = \mathrm{Sp}\, X$$

donc

$$\mathrm{Sp}(HX) = \mathrm{Sp}(X) \text{ pour tout } X \text{ de } \mathcal{M}.$$

Supposons $H \neq I$ alors si $a_{12} \neq 0$ (par exemple), on prend $X = E_{12}$, $\mathrm{Sp}(X) = \{0\}$ et $HX = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ 1 & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}(HX) = \{a_{12}\}$ ce qui est impossible donc G est semblable à I i.e. $G = I$ i.e. $\Psi(I) = I$. .... $\boxed{4}$

Si on revient à l'expression du 11, $AB = I$ donc

$$\Psi(X) = \begin{cases} AXA^{-1} \\ \text{ou} \\ AX^{\mathrm{T}}A^{-1} \end{cases}. \qquad \boxed{1}$$