

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATH ENSAE 2001

PREMIÈRE PARTIE

- I.1.** (\Rightarrow) On prend $\varepsilon_n = \text{sgn}(x_n)$, dans ce cas $\varepsilon_n x_n = |x_n|$ donc $\sum |x_n|$ converge.
 (\Leftarrow) $\sum \varepsilon_n x_n$ est absolument convergente donc convergente.
- I.2.** Montrons que $\sum x_n$ est inconditionnellement convergente ssi $\sum \|x_n\|$ converge.
 (\Rightarrow) On prend une base \mathcal{B} de E et, comme les normes sont toutes équivalentes, on choisit (sans restreindre la généralité de la démonstration) $\|x\| = \|x\|_\infty$ dans cette base. Si on écrit $x_{n,i}$ les coordonnées de x_n dans la base \mathcal{B} de E alors $\sum x_{n,i}$ est inconditionnellement convergente donc absolument convergente vu la première question et ceci pour tout i . Comme chaque série coordonnée est absolument convergente, on en déduit que $\sum x_n$ est absolument convergente.
 (\Leftarrow) La réciproque est évidente.
- I.3.** $x^{(n)} = (0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, 0, \dots)$ donc $\sum_{n=0}^N \varepsilon_n x^{(n)} = (\varepsilon_0, \frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_N}{N+1}, 0, \dots)$ qui converge vers la suite $x \in c_0$ définie par $x_k = \frac{\varepsilon_k}{k+1}$ car $\left\| x - \sum_{n=0}^N \varepsilon_n x^{(n)} \right\|_\infty = \frac{1}{N+2}$.
 Conclusion : la série $\sum x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente.
- I.4.** On a $\|x^{(n)}\|_\infty = \frac{1}{n+1}$ et la série $\sum \|x^{(n)}\|_\infty$ diverge. Ceci prouve qu'en dimension infinie on n'a pas l'équivalence de la question 2.

DEUXIÈME PARTIE

- II.1.** K est un compact (fermé borné en dimension finie), Φ est continue ($A \mapsto \det A$ est continue en tant que fonction polynomiale, $u \mapsto A$ est continue en tant qu'application linéaire en dimension finie et $x \mapsto |x|$ est continue) donc Φ est bornée sur K et atteint ses bornes.
 Conclusion : il existe $u_0 \in K$ tel que $\sup_{u \in K} \Phi(u) = \Phi(u_0)$.
- II.2.** On note $\beta_0 = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et on définit $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ par $v(e_i) = \varepsilon_i$, on a évidemment $\Phi(v) = 1$. On pose alors $w = \frac{v}{\|v\|} \in K$, $\Phi(w) = \frac{1}{\|w\|^n}$ par conséquent $\Phi(u_0) \geq \Phi(w) > 0$ et en conclusion u_0 est inversible.
- II.3.** On remarque que si $\|w\| \leq 1$ alors $\Phi(w) \leq \Phi(u_0)$ (en effet, en posant $v = \frac{w}{\|w\|}$ alors $\Phi(w) = \underbrace{\|w\|^n}_{\leq 1} \underbrace{\Phi(v)}_{\leq \Phi(u_0)}$) donc, comme $\|u_0 + \varepsilon v\| \leq 1 + \varepsilon \|v\|$ (inégalité triangulaire) alors, en posant $w = \frac{u_0 + \varepsilon v}{1 + \varepsilon \|v\|}$ on obtient
- $$\left| \det \left(\frac{u_0 + \varepsilon v}{1 + \varepsilon \|v\|} \right) \right| \leq |\det u_0|$$
- soit $|\det u_0| \det(I + \varepsilon u_0^{-1} \circ v) \leq |\det u_0| (1 + \varepsilon \|v\|)^n$ et on obtient le résultat demandé en simplifiant par $|\det u_0| > 0$ (si $\det(u_0 + \varepsilon v) = 0$, c'est immédiat).

Remarque : on a noté $\det u_0$ le déterminant de la matrice de u_0 ce qui correspond ici à une notation impropre car u_0 n'est pas un endomorphisme.

II.4. Résultat classique sur les polynômes caractéristiques que l'on peut également démontrer en dérivant la fonction polynomiale $P(t) = \det(I_n + tA)$ où A est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^n :

$$P(t) = \det(C_1(t), \dots, C_n(t)) \text{ avec } C_i(t) = (ta_{1i}, \dots, 1 + ta_{ii}, \dots, ta_{ni})^T$$

on a $P(0) = 1$ et

$$P'(t) = \sum_{i=1}^n \det(C_1(t), \dots, C'_i(t), \dots, C_n(t)) \text{ avec } C'_i(t) = (a_{1i}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{ni})^T$$

donc $P'(0) = \text{Tr}(A)$ puisque $\det(C_1(0), \dots, C'_i(0), \dots, C_n(0)) = a_{ii}$ et finalement $\det(\text{Id} + tf) = 1 + t \text{Tr}(f) + o(t)$ car $P(t) = P(0) + tP'(0) + o(t)$.

II.5. On rassemble les résultats des deux questions précédentes

$$1 + t \text{Tr}(u_0^{-1} \circ v) + o(t) = \det(\text{Id} + tf) \leq |\det(\text{Id} + tf)| \leq \underbrace{(1 + t\|v\|)^n}_{=1+nt\|v\|+o(t)}$$

soit, en soustrayant 1 et en divisant par $t > 0$, on obtient $\text{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n\|v\| + o(1)$ et, en passant à la limite quand $t \rightarrow 0^+$,

$$\text{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n\|v\|.$$

Ensuite on a $\sup\{\text{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } \|v\| \leq 1\} \leq n$ or, pour $v = u_0$ on a égalité donc

$$\sup\{\text{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } \|v\| \leq 1\} = n$$

TROISIÈME PARTIE

III.1. a. Soit $v = u_0 \circ P$, on applique le II.5, d'où

$$\text{Tr}(u_0^{-1} \circ v) = \text{Tr}(P) = n - i \leq n\|u_0 \circ P\|$$

ce qui donne le résultat.

b. $\|u_0 \circ P\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|u_0 \circ P(x)\|$ et comme la sphère unité est compacte, la borne supérieure est atteinte donc $\exists x \in \ell_2^n$ t.q. $\|x\|_2 = 1$ et $\|u_0 \circ P\| = \|u_0 \circ P(x)\|$.

Soit $y = \frac{P(x)}{\|P(x)\|_2}$ ($P(x) \neq 0$ car $\|u_0 \circ P(x)\| > 0$) alors, comme $\|P(x)\|_2 \leq 1$,

$$\|u_0(y)\| = \frac{\|u_0 \circ P(x)\|}{\|P(x)\|_2} \geq \|u_0 \circ P\| \geq \frac{n-i}{n} \text{ et } \|y\|_2 = 1.$$

III.2. On sait qu'il existe un vecteur $y_1 \in E$ t.q. $\|y_1\|_2 = 1$ et $\|u_0(y_1)\| = 1$. Soit $F = \text{Vect}(y_1)$ alors, grâce à la question précédente, on sait qu'il existe $y_2 \in F^\perp$ t.q. $\|y_2\|_2 = 1$ et $\|u_0(y_2)\| \geq \frac{n-1}{n}$. En outre on a $(y_1|y_2) = 0$.

On procède alors par récurrence. Supposons construite la famille orthonormale (y_1, \dots, y_k) vérifiant $\forall j \in [1, k], \|u_0(y_j)\| \geq \frac{n-j+1}{n}$. On prend $F = \text{Vect}(y_1, \dots, y_k)$ et on choisit

y_{k+1} à l'aide de la question III.1.b. On a effectivement $\|u_0(y_{k+1})\| \geq \frac{n-k}{n}$, $\|y_{k+1}\|_2 = 1$

et $(y_j|y_{k+1}) = 0$ pour $j \leq k$ car $y_{k+1} \in F^\perp$. Ceci achève la récurrence.

Conclusion : on a ainsi construit une base orthonormale (y_1, \dots, y_n) de ℓ_2^n telle que $\|u_0(y_j)\| \geq \frac{n-j+1}{n}$ pour tout $j \in [1, n]$.

III.3. Si $j \leq m$ alors $\frac{n-j+1}{n} \geq \frac{n-m+1}{n} = \frac{n-\lfloor n/2 \rfloor}{n} \geq 1/2$ donc $\frac{1}{\|u_0(y_j)\|} \leq 2$.

Posons $b_i = \frac{a_i}{\|u_0(y_i)\|}$, $b_i^2 \leq 4a_i^2$. On a $\sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m b_i u_0(y_i) = u_0 \left(\sum_{i=1}^m b_i y_i \right)$ d'où

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i v_i \right\| &\leq \underbrace{\|u_0\|}_{=1} \cdot \underbrace{\left\| \sum_{i=1}^m b_i y_i \right\|_2}_{=(\sum_{i=1}^m b_i^2)^{1/2} \text{ car } (y_i) \text{ b.o.n.}} \\ &\leq 2 \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right). \end{aligned}$$

QUATRIÈME PARTIE

IV.1. On peut prendre $n_0 = 0$ car $\sum_{n \geq 0} c_n^2 = \frac{c^2}{4} \leq c^2$.

La suite $u_p = \sum_{n \geq p} c_n^2$ est décroissante de limite nulle.

On prend $n_1 = 1$ (qui convient bien ici) puis, par récurrence sur k , si on a choisi n_k on prend pour n_{k+1} le plus petit entier $\geq n_k + 1$ tel que $u_{n_{k+1}} \leq c^2 4^{-(k+1)}$.

IV.2. Soit F_k un sous-espace vectoriel de E de dimension $2(n_{k+1} - n_k) - 1$ (ceci est possible car E est de dimension infinie), on a vu au III que l'on pouvait définir une suite v_{n_k+i} de vecteurs de norme 1 telle que, pour tous réels $a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}$ on ait

$$\left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i v_i \right\| \leq 2 \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2 \right)^{1/2}$$

ce qui est le résultat attendu.

IV.3. Posons $x_n = c_n v_n$ et montrons que, quelque soit le choix des ε_n , la série $\sum \varepsilon_n x_n$ converge.

On utilise le critère de Cauchy, majorons $\left\| \sum_{n=m}^{m+p} \varepsilon_n x_n \right\|$. On note n_k le plus grand entier tel que $n_k + 1 \leq m$ et n_h le plus petit entier tel que $m+p \leq n_h$ alors, en prenant la propriété du III.2 avec $a_n = \varepsilon_n c_n$ si $m \leq n \leq m+p$ et $a_n = 0$ si $n_k + 1 \leq n < m$ on a

$$\left\| \sum_{n=m}^{n_{k+1}} \varepsilon_n x_n \right\| \leq 2 \left(\sum_{n=m}^{n_{k+1}} c_n^2 \right)^{1/2} \leq 2c2^{-k},$$

de même avec $a_n = 0$ si $m+p < n \leq n_h$ on a

$$\left\| \sum_{n=n_{h-1}+1}^{m+p} \varepsilon_n x_n \right\| \leq 2 \left(\sum_{n=n_{h-1}+1}^{m+p} c_n^2 \right)^{1/2} \leq 2c2^{-(h-1)}.$$

D'où, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=m}^{m+p} \varepsilon_n x_n \right\| &\leq 2c(2^{-k} + 2^{-k-1} + \dots + 2^{-(h-1)}) \\ &\leq 4c2^{-k}. \end{aligned}$$

la série vérifie bien le critère de Cauchy, elle converge.

IV.4. Il suffit maintenant de choisir $c_n = \frac{1}{n+1}$.

Remarque : ceci généralise le résultat du I.4.

CINQUIÈME PARTIE

- V.1.**
- $\Lambda(T)$ est un sous-ensemble non vide minoré de \mathbb{R} , il possède une borne inférieure $\pi(T)$.
 - Montrons que $\pi(T) \in \Lambda(T)$.
Soit $h > 0$ alors $\pi(T) + h \in \Lambda(T)$ (en effet, $\Lambda(T)$ est un intervalle de \mathbb{R} car si $C \in \Lambda(T)$ alors $\forall C' \geq C, C' \in \Lambda(T)$). On a ainsi

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in X^p, \sum_{j=1}^p \|T(x_j)\|' \leq (\pi(T) + h) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\| ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\}$$

et on sait que l'on peut permuter les quantificateurs \forall donc $\forall (x_1, \dots, x_p) \in X^p$,

$$\forall h > 0, \sum_{j=1}^p \|T(x_j)\|' \leq (\pi(T) + h) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\| ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\}$$

et quand $h \rightarrow 0$, on obtient

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in X^p, \sum_{j=1}^p \|T(x_j)\|' \leq \pi(T) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\| ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\}$$

soit $\pi(T) \in \Lambda(T)$ c.q.f.d.

- V.2.** On prend $p = 1$ alors $\|T(x_1)\|' \leq \pi(T) \sup \left\{ \underbrace{\|\varepsilon_1 x_1\|}_{=\|x_1\|} ; \varepsilon_1 = \pm 1 \right\}$. Soit T est continue et en outre $\|T\| \leq \pi(T)$ (et en général, on n'a pas égalité, cf. V.5).

V.3. On note $\mathcal{AS}(X, Y)$ l'ensemble des applications absolument sommantes de X dans Y .

- $\mathcal{AS}(X, Y) \neq \emptyset$ car l'application nulle est absolument sommante et si $\pi(T) = 0$ alors $T = 0$ or, vu l'inégalité de la question 2, $\pi(T) = 0 \Rightarrow \|T\| = 0 \Rightarrow T = 0$.
- Si $T \in \mathcal{AS}(X, Y)$ alors $\lambda T \in \mathcal{AS}(X, Y)$ et on a $\pi(\lambda T) = |\lambda| \pi(T)$ (évident).
- Montrons l'inégalité triangulaire (et la stabilité pour $+$) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \|(T+U)(x_j)\| &\leq \sum_{j=1}^p \|T(x_j)\| + \sum_{j=1}^p \|U(x_j)\| \\ &\leq \pi(T) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\| ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\} + \pi(U) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\| ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\} \\ &\leq [\pi(T) + \pi(U)] \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\| ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\} \end{aligned}$$

donc $T + U \in \mathcal{AS}(X, Y)$ et $\pi(T + U) \leq \pi(T) + \pi(U)$.

V.4. $\sum_{j=1}^p |f_j|$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\exists x_0 \in [0, 1]$ tel que $\sum_{i=1}^p |f_i(x_0)| = \left\| \sum_{i=1}^p |f_i| \right\|_{\infty}$. On pose $|f_j(x_0)| = \varepsilon'_j f_j(x_0)$ où $\varepsilon'_j = \pm 1$ selon le signe de $f_j(x_0)$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p |f_j(x_0)| &= \sum_{j=1}^p \varepsilon'_j f_j(x_0) \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon'_j f_j \right\|_{\infty} \\ &\leq \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j f_j \right\|_{\infty} ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\}. \end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 \sum_{j=1}^p |f_j(x)| dx \leq \sum_{j=1}^p |f_j(x_0)|$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \|J(f_j)\|_1 &= \int_0^1 \sum_{j=1}^p |f_j(x)| dx \leq \sum_{j=1}^p |f_j(x_0)| \\ &\leq \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j f_j \right\|_{\infty} ; \varepsilon_j = \pm 1 \right\} \end{aligned}$$

donc J est absolument sommante et $\pi(J) \leq 1$.

Enfin en prenant $f = 1$ qui appartient à X on obtient

$$1 = \|f\|_1 \leq \pi(J) \|f\|_{\infty} = \pi(J).$$

Conclusion : $\pi(J) = 1$.

V.5. C'est une conséquence immédiate de la partie I.

En effet, la série $\sum x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente mais n'est pas absolument convergente. On a $X_p = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x^{(j)} = (\varepsilon_0, \dots, \frac{\varepsilon_p}{p+1}, 0, \dots)$ donc $\|X_p\| = 1$. Or s'il existe

$\pi(I)$ alors les sommes partielles $\sum_{j=1}^p \underbrace{\|I(x^{(j)})\|}_{=x^{(j)}}$ sont majorées et cela entraîne que la série

$\sum x^{(j)}$ est absolument convergente ce qui est faux.

V.6. a. Soit $M_p = \left\| \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j \right\|$ (la borne supérieure est atteinte car on opère sur un ensemble fini) on utilise alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} 2 \left\| \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j \right\| &= \left\| 2 \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j + x_{p+1} + \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j - x_{p+1} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j + x_{p+1} \right\| + \left\| \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j - x_{p+1} \right\| \leq 2M_{p+1} \end{aligned}$$

ce qui donne effectivement $M_p \leq M_{p+1}$.

b. On raisonne par l'absurde en supposant que $\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = +\infty$.

Montrons par récurrence sur n qu'il existe une suite (p_n) d'entiers strictement croissante et une famille $(\varepsilon_j) \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\left\| \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon_j x_j \right\| \geq n$.

• $n = 0$: immédiat.

• On suppose la propriété vraie à l'ordre n . Choisissons $p_{n+1} > p_n$ tel que

$$M_{p_{n+1}} \geq 1 + n + 2M_{p_n}. \text{ On écrit que } M_{p_{n+1}} = \left\| \sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j \right\| \text{ et on pose } \varepsilon_j = \varepsilon'_j$$

pour $j \in [p_n + 1, p_{n+1}]$.

On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon_j x_j \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j - \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon'_j x_j + \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon_j x_j \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j \right\| - 2M_{p_n} \\ &\geq M_{p_{n+1}} - 2M_{p_n} \geq n + 1. \end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum x_n$ n'est pas inconditionnellement convergente ce qui est contraire à l'hypothèse donc la suite M_p est croissante et majorée donc convergente.

c. Si T est absolument sommante et $\sum x_n$ inconditionnellement convergente alors, en notant $M = \sup_{p \in \mathbb{N}} M_p$ qui existe d'après la question précédente, on a

$$\sum_{j=0}^p \|T(x_j)\|' \leq \pi(T)M$$

donc la série $\sum \|T(x_j)\|'$ est convergente.

- V.7.**
- On a vu au IV.4 que dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe une suite (x_n) de vecteurs inconditionnellement convergente mais non absolument convergente.
 - On vient de voir à la question précédente que, si I est absolument sommante alors toute suite inconditionnellement convergente est absolument convergente.

On a donc l'implication suivante : si l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante alors cet espace est de dimension finie.

Montrons la réciproque : supposons que $\dim E = n$, on munit E d'une base et on choisit la norme 1 associée, on va montrer que $\sum_{j=1}^p \|x_j\|_1 \leq n \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\|_1 \right\}$.

$$\text{En effet, } \sum_{j=1}^p \|x_j\|_1 = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n |x_{ij}| \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p |x_{ij}| \right).$$

Soit i_0 tel que $\sum_{j=1}^p |x_{i_0 j}| = \max_i \left(\sum_{j=1}^p |x_{ij}| \right)$ et prenons $\varepsilon = \text{sgn}(x_{i_0 j})$ alors, vu que l'on a

évidemment $n \sum_{j=1}^p |x_{i_0j}| \geq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p |x_{ij}| \right) = \sum_{j=1}^p \|x_j\|_1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_j \right\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_{ij} \right| \\ &\geq \sum_{j=1}^p |x_{i_0j}| \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p \|x_j\|_1 \end{aligned}$$

Conclusion : I est absolument sommante.

Finalement on a l'équivalence : l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante ssi cet espace est de dimension finie.

SIXIÈME PARTIE

VI.1. Soit $u_1 = u_0 \circ w$.

- u_1 inversible : évident.
- $\|u_0 \circ w\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|u_0 \circ w(x)\| = \sup_{\|y\|_2=1} \|u_0(y)\| = \|u_0\|$ car w est bijectif et conserve la norme.
- $\text{Tr}(u_1^{-1} \circ v) = \text{Tr}(w^{-1} \circ u_0^{-1} \circ v) = \text{Tr}(u_0^{-1} \circ v \circ w^{-1}) \leq n \|v \circ w^{-1}\| = n \|v\|$ car w^{-1} est aussi un automorphisme orthogonal.

VI.2. a. Classique : $f^* \circ f$ est diagonalisable (endomorphisme autoadjoint) et il existe une base orthonormée dans laquelle $M(f^* \circ f) = \text{Diag}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i > 0$. On prend pour s l'endomorphisme de matrice $\text{Diag}(\sqrt{\lambda_i})$ dans cette base. s est bien symétrique défini positif (donc inversible).

b. Soit $u = f \circ s^{-1}$ alors $u^* = s^{-1} \circ f^*$ et $u^* \circ u = s^{-1} \circ f^* \circ f \circ s^{-1} = \text{Id}$ donc u est orthogonal et $f = u \circ s$.

VI.3. On applique la question précédente à $f = u_0^{-1} \circ u_1$.

VI.4. On a $s = u^{-1} \circ u_0^{-1} \circ u_1$ et s symétrique > 0 d'où

$$0 < \det s = |\det s| = \underbrace{|\det u^{-1}|}_{=1} \cdot \frac{|\det u_1|}{|\det u_0|}$$

car le déterminant d'un automorphisme orthogonal vaut ± 1 . Or, par définition, $|\det u_0| \geq |\det u_1|$ donc $\det s \leq 1$.

Enfin, comme $s^{-1} = u_1^{-1} \circ (u_0 \circ u)$ on écrit

$$\text{Tr}(s^{-1}) \leq n \|u_0 \circ u\| \underbrace{=}_{\text{cf V.1}} n \|u_0\| = n.$$

VI.5. Classique : on prend le logarithme et on utilise sa stricte concavité. Il y a égalité pour $t_1 = \dots = t_n$.

VI.6. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de s ($\lambda_i > 0$) alors $\det s = \lambda_1 \dots \lambda_n \leq 1$ et $\text{Tr}(s^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \leq n$.

Si on applique l'inégalité de 5 à $t_i = \frac{1}{\lambda_i}$ on obtient

$$1 \leq \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k \leq 1.$$

On a ainsi égalité dans l'inégalité du 5 ce qui signifie que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$.

Conclusion : $s = I$ (s est diagonalisable et admet une seule valeur propre 1) et $u_1 = u_0 \circ u$ donc il y a "unicité" de u_0 à un automorphisme orthogonal près.