SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ on note A^{T} la matrice transposée de A, $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A et $\mathrm{Rg}(A)$ le rang de A.

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E ou 0 s'il n'y pas de confusion possible.

L'espace vectoriel V admet pour base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $(k,m) \in [1,n]^2$ on pose $E_{k,m} = e_k e_m^{\mathrm{T}}$ ce qui donne une matrice à n lignes et n colonnes dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $(i,j) = (k,m)$ et 0 sinon. La base canonique de E est constituée des n^2 matrices $E_{k,m}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. On note I la matrice identité, $I = \sum\limits_{k=1}^{n} E_{k,k}$.

Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V, $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw \mid w \in W\}$.

Si F est un sous-ensemble de E, on dit que W est stable par F si

$$\forall A \in F,\ A(W) \subset W.$$

Pour tout ensemble $\mathcal{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :

P_1 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,
P_2 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n,
P_3 : $\mathcal{L}$ contient I,
P_4 : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E,
P_5 : $\mathcal{L}$ est stable par produit de matrices : $(A,B) \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow AB \in \mathcal{L}$,
P_6 : si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$ alors soit $W = \{0_V\}$ soit $W = V$.

Première partie : Étude de quelques exemples

I.1. Dans cette question $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des matrices A de E inversibles : $\mathcal{L} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a. Soit x un vecteur non nul de V. Montrer que, pour tout vecteur y non nul de V, il existe une matrice inversible A telle que $Ax = y$.

Indication : on peut considérer 2 cas
- la famille (x,y) est liée,
- la famille (x,y) est libre.

En déduire que la propriété P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

b. Indiquer celles des propriétés P_1,..., P_5 qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.2. Dans cette question $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est à dire telles que

$$m > k \Rightarrow t_{k,m} = 0.$$

a. Montrer que e_n est un vecteur propre de tout $T \in \mathcal{L}$ (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ dépendant de T tel que $Te_n = \lambda e_n$). Que peut-on dire de la propriété P_6 pour $\mathcal{L}$?

b. Indiquer celles des propriétés P_1,..., P_5 qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.3. Dans cette question $n = 2$ et $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.

a. On suppose que P_1 n'est pas vérifiée par $\mathcal{L}$. Soit $A \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Quelles sont les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$?
Montrer que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles.

b. On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$. Montrer qu'alors la propriété P_1 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées.

Deuxième partie

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathcal{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 est aussi vérifiée.

On note

$$m = \min\{\mathrm{Rg}(M) \mid M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\}\},$$

et on se propose de montrer que $m = 1$, ce qui établira P_1.

On suppose dans un premier temps que $m \geqslant 2$.

II.1. Montrer que m est bien défini et qu'il existe une matrice $M_0 \in \mathcal{L}$ telle que $\mathrm{Rg}(M_0) = m$.

On considère une base $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de $M_0(V)$. On note $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ des éléments de V tels que $\forall i \in [1, m]$, $M_0 x_i = z_i$.

II.2. **a.** Montrer que $\{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\} = V$.
On note alors N_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $N_0 z_1 = x_2$ et on pose $M_1 = M_0 N_0 M_0$.

b. Montrer que (M_0, M_1) est une famille libre.

II.3. **a.** Montrer que $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$ puis que

$$\exists (\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V) \text{ tels que } z \neq 0_V \text{ et } M_0 N_0 z = \alpha z.$$

b. En déduire que $0 < \mathrm{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < \mathrm{Rg}(M_0)$.

c. Conclure.

Troisième partie

Dans cette partie on suppose que $n > 2$ et que la dimension de $\mathcal{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que P_3 et P_6 sont vérifiées puis que $\mathcal{L} = E$, c'est à dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de E stable par produit matriciel.

III.1. Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$; on note k la dimension de W.

a. Montrer que $\mathcal{K} = \{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{L}$.

b. Donner la dimension de $\mathcal{K}$.

c. En déduire que $W = \{0_V\}$ ou $W = V$.

Remarque : on a donc démontré P_6.

III.2. **a.** On suppose dans cette question que
$$\exists (k,m) \in [1,n]^2,\ k \neq m \text{ tels que } E_{k,m} \in E \setminus \mathcal{L}. \tag{$*$}$$
On note alors $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(E_{k,m}, I)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $E_{k,m}$ et I.
Montrer que $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geqslant 1$ puis que $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible.

b. On suppose ici que c'est le contraire de $(*)$ qui est vrai.
Montrer que $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible.

III.3. **a.** Montrer que, pour toute matrice A de E, la famille $(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1})$ est une famille liée.

b. Prouver que P_3 est vérifiée.

c. En déduire qu'il existe une matrice M_0 de rang 1 qui appartient à $\mathcal{L}$ et montrer qu'il existe $(v_0, w_0) \in (V \setminus \{0_V\})^2$ tels que $M_0 = v_0 \overline{w_0}^{\mathrm{T}}$.

III.4. Pour tout vecteur $v \in V$ on pose
$$A_v = \{Lv \mid L \in \mathcal{L}\}, \quad B_v = \{\overline{L}^{\mathrm{T}} v \mid L \in \mathcal{L}\}, \quad C_v = \{w \in V \mid \forall x \in B_v,\ \overline{x}^{\mathrm{T}} w = 0\}.$$

a. Soit $u \in V$, $u \neq 0_V$. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$ et que B_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$.

b. En déduire que $C_u = \{0_V\}$ et que $B_u = V$.

c. Montrer que $A_u = V$.

d. Déduire de ce qui précède que toute matrice de rang 1 appartient à $\mathcal{L}$.

e. Conclure.