

CENTRALE 2001 PC II

PREMIÈRE PARTIE 29

- I.1. a.**
- Si x et y sont non nuls et liés alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $y = \lambda x$. Il suffit alors de prendre $A = \lambda I \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ car $\lambda \neq 0$ 2
 - Si la famille (x, y) est libre alors on peut la compléter en une base de V : (x, y, e_3, \dots, e_n) . On prend pour A la matrice de l'endomorphisme f défini par $f(x) = y, f(y) = x, f(e_i) = e_i$ qui transforme une base en une base. A est bien inversible. 3
- Remarque* : on pouvait directement compléter les familles à un élément (x) et (y) en deux bases et prendre pour A la matrice de passage.
- Propriété P_6 : si W est stable par \mathcal{L} , on distingue deux cas
- $W = \{0_V\}$,
 - $W \neq \{0_V\}$ donc $\exists x \neq 0$ tel que $x \in W$. Pour tout $y \in V \setminus \{0_V\}$ on sait qu'il existe $A \in \mathcal{L}$ tel que $Ax = y$ et par hypothèse $Ax \in W$ donc $y \in W$. Comme $0_V \in W$ on peut effectivement conclure que $W = V$ 3
- b.**
- P_1 non vérifiée : $n \geq 2$ et toutes les matrices de \mathcal{L} sont de rang n .
 - P_2 et P_3 sont vérifiées : $I \in \mathcal{L}$ est bien de rang n .
 - P_4 n'est pas vérifiée : $0_E \notin \mathcal{L}$.
 - P_5 est vérifiée : en effet le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible. 4
- I.2. a.** On a immédiatement $Te_n = t_{n,n}e_n$ et par conséquent e_n est bien vecteur propre de T pour tout $T \in \mathcal{L}$ 2
- L'espace $W = \text{Vect}(e_n)$ est un sous-espace stable par \mathcal{L} et $W \neq \{0_V\}$ ainsi que $W \neq V$ donc la propriété P_6 n'est pas vérifiée. 2
- b.** L'ensemble des matrices triangulaires inférieures est une algèbre d'éléments unités I inversible ce qui permet d'avoir immédiatement les propriétés P_i pour i allant de 2 à 5.
- Comme $E_{1,1} \in \mathcal{L}$ alors la propriété P_1 est aussi vérifiée. 3
- I.3. a.** \mathcal{L} étant une algèbre contenant I et A alors $A - \lambda I \in \mathcal{L}$. Les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$ sont donc 0 et 2. 2
- $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme non nul à coefficients complexes, il admet donc une racine. Soit λ cette valeur, $A - \lambda I$ est de rang inférieur ou égal à 1, donc de rang nul soit $A = \lambda I$ 4
- On vient de prouver que \mathcal{L} est inclus dans l'ensemble \mathcal{H} des homothéties vectorielles. L'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ étant évidente, on peut conclure : $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ 1
- b.** On procède par contraposée : si P_1 n'est pas vérifiée par \mathcal{L} alors, vu le résultat de la question précédente, $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ et dans ce cas \mathcal{L} ne vérifie pas P_6 .
- Conclusion : $P_6 \Rightarrow P_1$ 3

DEUXIÈME PARTIE 19

II.1. $\{\text{Rg}(M) \mid M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\}\}$ est un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} , il possède un plus petit élément m donc il existe $M_0 \in \mathcal{L} \mid \text{Rg}(M_0) = m$ 1

II.2. a. Soit $W = \{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\}$. Il suffit de prouver que W est un sous-espace vectoriel stable non réduit à $\{0_V\}$.

- W sous-espace vectoriel : évident car \mathcal{L} vérifie P_4 .
- W stable par \mathcal{L} : conséquence de la propriété P_5 .
- $W \neq \{0_V\}$ car $z_1 = Iz_1 \in W$ et $z_1 \neq 0_V$ en tant qu'élément d'une base. 3

b. Soit $\lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 = 0$ alors, en appliquant cette égalité au vecteur x_1 on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_0 M_0 x_1 + \lambda_1 M_1 x_1 &= \lambda_0 z_1 + \lambda_1 M_0 N_0 z_1 \\ &= \lambda_0 z_1 + \lambda_1 M_0 x_2 \\ &= \lambda_0 z_1 + \lambda_1 z_2 = 0 \end{aligned}$$

et comme la famille (z_1, z_2) est libre on en déduit que $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ ce qui permet de conclure que la famille (M_0, M_1) est libre. 2

II.3. a. • Comme $N_0(M_0(V)) \subset V$ on a bien évidemment $M_0 N_0(M_0(V)) \subset M_0(V)$ 1

- Soit L_0 l'endomorphisme de $M_0(V)$ obtenu en restreignant $M_0 N_0$ à $M_0(V)$. Comme L_0 est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} alors le polynôme $\det(L_0 - \lambda I)$ (qui est non nul) possède une racine α . L'endomorphisme $L_0 - \alpha I$ n'est pas injectif, il existe donc un vecteur non nul z tel que $L_0 z = \alpha z$ ce qui répond à la question. 4

b. D'une part, si $x \in \text{Ker } M_0$ alors $(M_1 - \alpha M_0)x = M_0 N_0 M_0 x = 0$ par conséquent $\text{Ker } M_0 \subset \text{Ker}(M_1 - \alpha M_0)$ 2

D'autre part $z = M_0(y)$ et $y \in \text{Ker}(M_1 - \alpha M_0)$ mais $y \notin \text{Ker } M_0$ donc $\text{Ker } M_0 \neq \text{Ker}(M_1 - \alpha M_0)$.

Par le théorème du rang on peut donc conclure que $\text{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < \text{Rg } M_0$ 2

Ensuite, $M_1 - \alpha M_0 \neq 0$ car (M_0, M_1) forme une famille libre donc $\text{Rg}(M_1 - \alpha M_0) > 0$, finalement $0 < \text{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < \text{Rg } M_0$ 1

c. \mathcal{L} étant une algèbre, $M_1 - \alpha M_0 \in \mathcal{L}$, $M_1 - \alpha M_0 \neq 0$ et on vient de prouver que $\text{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < m$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur m . $m \geq 2$ est impossible et $m > 0$ donc $m = 1$, ce qui établit P_1 3

TROISIÈME PARTIE 47

III.1. a. Par les propriétés des combinaisons linéaires, \mathcal{K} est un sous-espace vectoriel de E . Comme W est stable par \mathcal{L} , il est évident que $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ 1

b. Soit X un supplémentaire de W dans V , m l'endomorphisme de \mathbb{C}^n de matrice M . Soit enfin \mathcal{B} une base adaptée à la décomposition $V = W \oplus X$. On a alors

$$M \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \text{la matrice de } m \text{ dans } \mathcal{B} \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{C})$, $0 \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{C})$. L'ensemble des matrices qui s'écrivent de cette façon est un espace vectoriel de dimension $n^2 - k(n-k)$ ce qui, grâce à l'isomorphisme $M \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, permet d'affirmer que $\dim \mathcal{K} = n^2 - k(n-k)$ 6

c. On a ainsi

$$n^2 - 1 \leq \dim \mathcal{L} \leq \dim E_W = n^2 - n(n - k)$$

soit $0 \leq k(n - k) \leq 1$. On distingue alors deux cas :

- $k(n - k) = 1$ soit, puisque k et n sont des entiers et que $k \in [0, n]$, $k = 1$, $n - k = 1$. Cette éventualité à été écartée par l'hypothèse $n > 2$.
- $k(n - k) = 0$ fournit alors $k = 0$ ou $k = n$.

Conclusion : si $k = 0$ alors $W = \{0_V\}$ et si $k = n$ alors $W = V$ **3**

III.2. a. $E_{k,m}$ et I sont linéairement indépendants donc $\dim \mathcal{H} = 2$. On utilise alors l'égalité de Grassman :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H} \cap \mathcal{L} &= \dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{L} - \underbrace{\dim(\mathcal{H} + \mathcal{L})}_{\leq n^2} \\ &\geq 2 + (n^2 - 1) - n^2 = 1. \end{aligned}$$

\mathcal{L} contient donc une matrice de la forme $\alpha I + \beta E_{k,m}$ non nulle. α ne peut être nul sinon $\beta \neq 0$ et $E_{k,m} \in \mathcal{L}$, hypothèse écartée. On a par conséquent $\alpha \neq 0$ et la matrice $\alpha I + \beta E_{k,m}$ est bien inversible.

\mathcal{L} contient une matrice inversible. **3**

b. On prend par exemple $\sum_{k=1}^{n-1} E_{k+1,k} + E_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ (car \mathcal{L} est stable par

combinaison linéaire) qui est inversible en tant que matrice de permutation. **3**

Remarque : on a aussi $E_{k,m} E_{m,k} = E_{k,k}$ d'où la conclusion immédiate que $\mathcal{L} \supset \text{Vect}(E_{k,m}) = E$.

Conclusion : les deux cas envisagés représentent l'ensemble des possibilités donc on peut dire que, dans tous les cas, \mathcal{L} contient une matrice inversible (et la propriété P_2 est satisfaite).

III.3. a. La famille $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs dans un espace de dimension n^2 , elle est par conséquent liée. **1**

b. On sait qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{L}$ inversible grâce à la question III.2. **1**

On peut alors trouver des scalaires $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n^2+1})$ non tous nuls tels que

$$\mu_1 A + \mu_2 A^2 + \dots + \mu_{n^2+1} A^{n^2+1} = 0.$$

Soit $k = \min\{q \in [1, n^2 + 1] \mid \mu_k \neq 0\}$, comme A^k est inversible, on peut simplifier la relation précédente et avoir

$$\mu_k I + \mu_{k+1} A + \dots + \mu_{n^2+1} A^{n^2+1-k} = 0.$$

avec $\mu_k \neq 0$.

\mathcal{L} étant une algèbre et $\mu_k \neq 0$ alors

$$I = \frac{-1}{\mu_k} (\mu_{k+1} A + \dots + \mu_{n^2+1} A^{n^2+1-k}) \in \mathcal{L}. \quad \mathbf{3}$$

c. • Grâce aux résultats du III.1 et du III.3.b, P_3 et P_6 sont vérifiées, par conséquent la partie II nous assure que P_1 est vérifiée. Il existe donc $M_0 \in \mathcal{L}$ de rang 1. **1**

• Si $v_0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $w_0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ alors $v_0 \overline{w_0^T} = \begin{pmatrix} v_1 \overline{w_1} & \dots & v_1 \overline{w_n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_n \overline{w_1} & \dots & v_n \overline{w_n} \end{pmatrix}$.

$\text{Rg}(M_0) = 1$ donc toutes les colonnes de M_0 sont proportionnelles et il y a au moins une colonne non nulle. Soit C la colonne non nulle alors $M_0 = (\lambda_1 C, \dots, \lambda_n C)$ et les λ_i ne sont pas tous nuls car $M_0 \neq 0$.

On pose alors $v_0 = C$ et $w_0 = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$ **2**

III.4. a. • C_u est un sous-espace vectoriel en tant qu'orthogonal d'une partie de V .
En effet, si $(w, w') \in (C_v)^2$ alors $\forall x \in B_v, \overline{x}^T(\lambda w + \lambda' w') = 0$ par linéarité du produit matriciel donc C_v est stable par combinaison linéaire..... **1**

• $B_u \neq \{0\}$ car $I \in \mathcal{L}$ donc $u \in B_u$ **1**

• C_u est stable par \mathcal{L} :
soit $x \in C_u$ alors $\forall L \in \mathcal{L}$,

$$\overline{(\overline{L}^T v)}^T x = \overline{v}^T Lx = 0$$

donc $\forall M \in \mathcal{L}$,

$$\overline{(\overline{L}^T v)}^T Mx = \overline{v}^T LMx = 0$$

car $LM \in \mathcal{L}$. On peut donc conclure que C_u est stable par \mathcal{L} **4**

b. C_u est stable par \mathcal{L} donc $C_u = \{0_V\}$ ou $C_u = V$. Or si $C_u = V$ alors

$$\forall x \in B_u, \forall w \in V, \overline{x}^T w = 0$$

soit, en prenant $w = x, \overline{x}^T x = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0$ donc $x = 0$. On aurait ainsi $B_u = \{0_V\}$ ce qui est impossible.

Conclusion : $C_u = \{0_V\}$ **3**

Si $B_u \neq V$ alors soit (e_1, \dots, e_k) une base de B_u (avec $k < n$). La matrice dont les lignes sont les $\overline{e_i}^T$ est de rang $k < n$ donc son noyau n'est pas réduit à 0 donc

$$\exists w \neq 0 \mid \forall i \in [1, k], \overline{e_i}^T w = 0$$

ce qui signifie que $w \in C_v$ (par linéarité) et entraîne une contradiction.

Conclusion : on a $B_u = V$ **3**

c. A_u est stable par \mathcal{L} (même démonstration qu'à la question II.A) et comme $u \in A_u$ alors $A_u \neq \{0_V\}$ donc $A_u = V$ **2**

d. On procède en plusieurs points :

- Comme $A_{v_0} = V$ il est immédiat que $\forall x \in V, \exists L \in \mathcal{L}, Lv_0 = x$.
- De même, $B_{w_0} = V$ donc $\forall y \in V, \exists M \in \mathcal{L}, {}^t \overline{M} w_0 = y$.
- Toute matrice de rang 1 s'écrivant $x {}^t \overline{y}$ avec $(x, y) \in (V \setminus \{0_V\})^2$ alors

$$x {}^t \overline{y} = Lv_0 {}^t \overline{w_0} M = LM_0 M \in \mathcal{L}$$

donc \mathcal{L} contient toutes les matrices de rang 1. **5**

e. \mathcal{L} contient toutes les matrices $E_{k,m}$ et comme \mathcal{L} est un espace vectoriel alors on a $\mathcal{L} \supset \text{Vect}(E_{k,m}) = E$.

L'inclusion dans l'autre sens étant acquise on obtient finalement $L = E$ **2**