ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 1999

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

* * *

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

* * *

Notations

Pour toute fonction f de deux variables réelles x et y, on posera $\partial_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Par ailleurs on pose

$$\Pi_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$
$$\bar{\Pi}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$$

Enfin on désigne par K la fonction sur Π_+ définie par

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Première partie

1. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y) \mathrm{d}x$.

2. Calculer $\partial_1 K$, $\partial_2 K$, $\partial_1^2 K + \partial_2^2 K$.

3. Montrer que, si m et n sont deux entiers $\geqslant 0$, $(\partial_1^m \partial_2^n K)(x,y)$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P_{m,n}(x,y)}{(x^2 + y^2)^{m+n+1}}$ où $P_{m,n}$ est un polynôme dont le degré par rapport à x est majoré par $2(m+n)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, la lettre f désigne une fonction complexe continue bornée sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que, pour tout (x,y) dans Π_+, la fonction $t \mapsto f(t)K(x-t,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On notera $\Phi_f\ (x,y)$ son intégrale.

5.a) Montrer que la fonction Φ_f ainsi définie sur Π_+ est continue et bornée.

b) On désigne par E (resp. F) l'espace des fonctions complexes continues bornées sur $\mathbb{R}$ (resp. sur Π_+) et on le munit de la norme $\varphi \mapsto \|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$ (resp. $\sup_{(x,y)\in\Pi_+} |\varphi(x,y)|$).
Vérifier que l'application linéaire $f \mapsto \Phi_f$ de E dans F est continue et préciser sa norme.

6. Montrer que Φ_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculer $\partial_1^2\Phi_f + \partial_2^2\Phi_f$.

7. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, Φ_f est uniformément continue sur le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant a\}$.

8. Soit x_0 un réel, ε un réel > 0. Trouver un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \Pi_+, \qquad |x - x_0| < \eta, \quad y < \eta \Rightarrow |\Phi_f(x,y) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On notera $\overline{\Phi_f}$ la fonction continue sur $\bar{\Pi}_+$ égale à Φ_f sur Π_+ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{\Phi_f}(x,0) = f(x)$.

9. On suppose f uniformément continue.

a) Soit ε un réel > 0. Trouver un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \Pi_+, \forall x_0 \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta,\ y \leqslant \eta \Longrightarrow |\Phi_f(x,y) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

b) Montrer que la fonction $\overline{\Phi_f}$ est uniformément continue.

Troisième partie

10. On prend ici pour f la fonction $x \mapsto e^{i\alpha x}$ où α est un réel > 0 fixé.

a) Montrer qu'il existe une fonction g telle que l'on ait $\Phi_f(x,y) = f(x)g(y)$.

b) Écrire une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par g et en déduire explicitement Φ_f.

11. On fixe un réel $a > 0$. Expliciter la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x,$$

puis la fonction $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy} \psi(p) \mathrm{d}p$.

12. On note ici f une fonction continue périodique de période 2π et y_0 un réel > 0.
On pose $h(x) = \Phi_f(x,y_0)$.

a) Vérifier que h est périodique de période 2π.

b) Exprimer les coefficients de Fourier de h en fonction de ceux de f. [On montrera d'abord que l'on a

$$\widehat{h}(n) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left(\int_{-A}^{A} f(x-t) K(t,y_0) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

Quatrième partie

On suppose ici que la fonction continue f tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\, \infty$.

13. Montrer que la fonction $\overline{\Phi}_f$ est uniformément continue.

14. Soit ε un réel > 0 ; déterminer des réels a et u tels que l'on ait $\left|\overline{\Phi}_f(x,y)\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout point (x,y) de $\bar{\Pi}_+$ satisfaisant $y \geqslant a$ ou $|x| \geqslant u$.

15. Déterminer la limite de $\overline{\Phi}_f(x,y)$ lorsque $|x| + y$ tend vers l'infini.

16. On désigne par E_0 le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions qui tendent vers 0 lorsque la variable tend vers $\pm\, \infty$.

Déterminer la norme de l'application $f \mapsto \Phi_f$ de E_0 dans F.

* *
*