

X MATH 1 99

PREMIÈRE PARTIE 10

1. $K(x, y) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $x \mapsto K(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} et..... 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) dx = \frac{1}{\pi} \left[\text{Arctan} \frac{x}{y} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \quad \text{car } y > 0. \quad \text{1}$$

2. Après calculs on obtient

$$\begin{aligned} \partial_1 K(x, y) &= -\frac{2xy}{\pi(x^2 + y^2)^2} & \partial_2 K(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_1^2 K(x, y) &= \frac{6x^2y - 2y^3}{\pi(x^2 + y^2)^3} & \partial_2^2 K(x, y) &= -\frac{6x^2y - 2y^3}{\pi(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

Conclusion : $\Delta K = 0$ 2

Remarque : comme $K(x, y) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{x + iy}$ la relation $\Delta K(x, y) = 0$ est immédiate.

3. On procède par récurrence sur $m + n$.

Si $m + n = 1$ alors la propriété est vérifiée avec $P_{1,0}(x, y) = -2xy$, $P_{0,1}(x, y) = x^2 - y^2$.
On suppose la propriété vraie à l'ordre p .

À l'ordre $p + 1$:

- Si $m \geq 1$, comme $m + n = p + 1$ cela s'écrit $(m - 1) + n = p$ et on applique l'hypothèse de récurrence d'où

$$\begin{aligned} (\partial_1^m \partial_2^n K)(x, y) &= \partial_1 [\partial_1^{m-1} \partial_2^n K](x, y) \text{ grâce au th. de Schwarz} \\ &= \frac{(x^2 + y^2) \partial_1 P_{m-1, n}(x, y) - 2(m + n)x P_{m-1, n}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{m+n+1}} \end{aligned}$$

et on pose

$$P_{m, n}(x, y) = (x^2 + y^2) \underbrace{\partial_1 P_{m-1, n}(x, y)}_{\text{deg} \leq 2(m+n)-3} - 2(m + n) \underbrace{x P_{m-1, n}(x, y)}_{\text{deg} \leq 2(m+n)-1}$$

ce qui prouve la propriété dans ce cas..... 3

- Si $m = 0$ alors

$$\begin{aligned} (\partial_2^n K)(x, y) &= \partial_2 (\partial_2^{n-1} K)(x, y) & &= \partial_2 \left[\frac{P_{0, n-1}(x, y)}{(x^2 + y^2)^n} \right] \\ &= \frac{(x^2 + y^2) \partial_2 P_{0, n-1}(x, y) - 2ny P_{0, n-1}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

et on prend dans ce cas

$$P_{0, n}(x, y) = (x^2 + y^2) \underbrace{\partial_2 P_{0, n-1}(x, y)}_{\text{deg} \leq 2n-2} - 2n \underbrace{y P_{0, n-1}(x, y)}_{\text{deg} \leq 2n}$$

ce qui achève la récurrence..... 3

On trouve en fait, avec la remarque du 2 que

$$\begin{aligned} (\partial_1^m \partial_2^n K(x, y)) &= \frac{(-1)^{m+n}}{\pi} (m+n)! \operatorname{Im} \frac{i^n}{(x+iy)^{m+n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{m+n}}{\pi} (m+n)! \operatorname{Im} \frac{i^n (x-iy)^{m+n+1}}{(x^2+y^2)^{m+n+1}} \end{aligned}$$

i.e. $P_{m,n}(x, y) = \frac{(-1)^{m+n}}{\pi} (m+n)! \operatorname{Im} [i^n (x-iy)^{m+n+1}]$.

DEUXIÈME PARTIE 36

4. $\varphi : t \mapsto f(t)K(x-t, y)$ est localement intégrable car elle est continue. Comme f est bornée, $\varphi = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur \mathbb{R} 1

5. a) On a $\Phi_f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt$ alors

$$|\Phi_f(x, y)| \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt = \|f\|_\infty$$

(en posant $u = t - x$, on se ramène au calcul du I.1.). Φ_f est donc bornée. 2

Montrons que Φ_f est continue. On va utiliser le théorème de Lebesgue de continuité sous le signe intégral. Tout d'abord, on fait le changement de variable $t - x = uy$ ($y > 0$) ce qui donne la nouvelle expression de Φ_f :

$$\Phi_f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+uy) \frac{du}{1+u^2}.$$

- $(x, y, u) \mapsto \frac{f(x+uy)}{\pi[1+u^2]}$ est une fonction continue de x, y, u .
- Soit $(x, y) \in \Pi_+$ alors

$$\left| \frac{f(x+uy)}{\pi[1+u^2]} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \frac{1}{1+u^2}$$

qui est intégrable.

Le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique et on peut conclure que Φ_f est continue sur Π_+ 4

b. On a vu au début que $|\Phi_f(x, y)| \leq \|f\|_\infty$ donc $\|\Phi_f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Comme $\Phi : f \mapsto \Phi_f$ est visiblement linéaire, Φ est continue. 1

Si $f = 1$ (fonction constante égale à 1) alors $\Phi_f(x, y) = 1$ donc on a effectivement $\|\Phi\| = 1$ 1

6. On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral et une récurrence sur $m+n$, l'ordre de dérivation de Φ_f . La propriété est bien vraie pour $p = m+n = 0$
 Hypothèse de récurrence : Φ_f est dérivable m fois par rapport à x , n fois par rapport à y pour $m+n \leq p$ et

$$\partial_1^m \partial_2^n \Phi_f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\partial_1^m \partial_2^n K(x-t, y)] dt.$$

Supposons que $m+n = p+1$, on va utiliser le résultat du I.3. avec le théorème de Lebesgue de dérivation.

On sait que $\varphi_{m,n}(t) = f(t) \frac{P_{m,n}(x-t, y)}{[(x-t)^2 + y^2]^{m+n+1}}$ et on se place sur le compact $[a, b] \times [c, d]$.

On pose $P_{m,n}(x-t, y) = Q_{m,n}(t)$. Alors $\deg(Q_{m,n}) \leq 2(m+n)$ d'après le I.3. D'où

$$Q_{m,n}(t) = \sum_{k=0}^{2(m+n)} a_k(x, y) \times t^k.$$

Or, les a_k sont des fonctions polynomiales de x et y et donc sont bornées sur le compact. D'où

$$\begin{aligned} |Q_{m,n}(t)| &\leq \sum_{k=0}^{2(m+n)} |a_k(x, y)| \times |t|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{2(m+n)} \|a_k(x, y)\| \times |t|^k = F_{m,n}(t) \end{aligned}$$

Pour le dénominateur, on minore le dénominateur :

$$((x-t)^2 + y^2)^{m+n+1} \geq \min_{x \in [a,b]} [(x-t)^2] + c^2.$$

L'hypothèse de domination s'écrit

$$f(t) [\partial_1^m \partial_2^n K(x-t, y)] \leq \frac{F_{m,n}(t)}{(\min_{x \in [a,b]} [(x-t)^2] + c^2)^{m+n+1}} = \varphi(t)$$

avec φ continue et $\varphi(t) = O(\frac{1}{t^2})$ (le numérateur est de degré $\leq 2(m+n)$ et le dénominateur est de degré $2(m+n+1)$), donc φ est intégrable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral. 8

Enfin, on a

$$(\partial_1^2 \Phi_f + \partial_2^2 \Phi_f)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\partial_1^2 + \partial_2^2)(K(x-t, y)) dt = 0 \quad \text{1}$$

7. Il suffit en fait de majorer les dérivées partielles et d'utiliser le théorème des accroissements finis.

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi_f(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{-2(x-t)y}{[(x-t)^2 + y^2]^2} dt \\ |\partial_1 \Phi_f(x, y)| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|x-t|y}{[(x-t)^2 + y^2]^2} dt \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-t)^2 + y^2} dt \text{ avec l'inégalité } 2ab \leq a^2 + b^2 \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{y} \leq \frac{\|f\|_\infty}{a} \end{aligned}$$

où on a utilisé le calcul du 1.

De même

$$\begin{aligned} |\partial_2 \Phi_f(x, y)| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u^2 - y^2|}{(u^2 + y^2)^2} du \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + y^2} du \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{y} \leq \frac{\|f\|_\infty}{a}. \end{aligned}$$

On a donc $\|\text{grad } \Phi_f(x, y)\| \leq \frac{\sqrt{2}\|f\|_\infty}{a}$ et, par le théorème des accroissements finis,

$$|\Phi_f(x, y) - \Phi_f(x_0, y_0)| \leq \frac{\sqrt{2}\|f\|_\infty}{a} \|(x, y) - (x_0, y_0)\|. \quad \boxed{6}$$

Remarque : en utilisant la remarque du 2 on obtient $\|\nabla K(x, y)\|^2 = \frac{1}{\pi^2(x^2 + y^2)^2}$ d'où

$$\|\nabla \Phi_f(x, y)\| \leq \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\nabla K(x - t, y)\| dt \leq \frac{M}{\pi} y.$$

8. On sait que $1 = \int_{\mathbb{R}} K(x - t, y) dt$ donc

$$\Phi_f(x, y) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} [f(t) - f(x_0)] K(x - t, y) dt.$$

Comme f est continue en x_0 , il existe $\eta' > 0$ tel que $|t - x_0| \leq \eta' \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc

$$\begin{aligned} |\Phi_f(x, y) - f(x_0)| &\leq \underbrace{\int_{|t-x_0| \leq \eta'} |f(t) - f(x_0)| K(x - t, y) dt}_{\leq \varepsilon/2} + \int_{|t-x_0| \geq \eta'} |f(t) - f(x_0)| K(x - t, y) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{|t-x_0| \geq \frac{1}{2}\eta'} K(x - t, y) dt}_{=A}. \end{aligned}$$

On peut effectivement calculer A :

$$\begin{aligned} A &= 2\|f\|_\infty 2 \int_{\eta'/2}^{+\infty} K(u, y) du = \frac{4\|f\|_\infty}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{\eta'}{2y} \right] \\ &\leq \frac{4\|f\|_\infty}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{\eta'}{2\eta} \right]. \end{aligned}$$

On choisit alors $\eta \leq \frac{\eta'}{2}$ suffisamment petit pour que $A \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui prouve l'inégalité. $\boxed{6}$

9. a. On reprend le raisonnement du 8, le choix de η' ne dépend plus de x , la conclusion est alors immédiate. $\boxed{1}$

b. Pour prouver que la fonction Φ_f est uniformément continue, on procède de la manière suivante : soit $\varepsilon > 0$

- on choisit le η mis en évidence au a) en prenant $\frac{\varepsilon}{2}$;
- pour $y \geq \frac{\eta}{2}$, on sait que Φ_f est uniformément continue sur $\mathbb{R} \times [\eta/2, +\infty[$ donc, pour cet $\varepsilon > 0$, il existe $\eta' > 0$ convenable tel que

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq \eta' \Rightarrow |\Phi_f(x_1, y_1) - \Phi_f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon;$$

- on prend alors $\eta'' = \inf(\eta', \frac{1}{2}\eta)$ et, en notant $\Pi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \eta\}$ et $\Pi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \eta/2\}$, on majore $|\Phi_f(x_1, y_1) - \Phi_f(x_2, y_2)|$ pour $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq \eta''$ en distinguant les cas :
 - (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dans Π_2 , Φ_f est uniformément continue sur Π_2 ,
 - (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dans Π_1 alors

$$|\Phi_f(x_1, y_1) - \Phi_f(x_2, y_2)| \leq |\Phi_f(x_1, y_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - \Phi_f(x_2, y_2)|$$

et on utilise le a. $\boxed{5}$

TROISIÈME PARTIE 20

10. a. On a

$$\begin{aligned} \Phi_f(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha t} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \text{ et en posant } u = x - t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha(x-u)} \frac{y}{u^2 + y^2} du \\ &= f(x)g(y) \end{aligned}$$

où $g(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha u} \frac{y}{u^2 + y^2} du$. 2

b. On sait que $\Delta\Phi_f = 0$ soit $f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0$ ce qui donne, en simplifiant par $e^{i\alpha x}$, $-\alpha^2 g(y) + g''(y) = 0$ donc $g(y) = ae^{\alpha y} + be^{-\alpha y}$. Comme $g(0) = 1$, que g doit être bornée (car Φ_f l'est) et que $\lim_{y \rightarrow 0} \Phi_f(x, y) = f(x)$ (question 8), on en déduit que $g(y) = e^{-\alpha y}$ soit

$$\phi_f(x, y) = e^{-\alpha y} e^{i\alpha x}. \quad \text{[4]}$$

11. On a vu que $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha u} \frac{y}{u^2 + y^2} du = e^{-\alpha y}$ donc $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\alpha u}}{u^2 + y^2} du = \frac{\pi e^{-\alpha y}}{y}$ pour $y > 0$. En

prenant le conjugué et en changeant le nom des variables, on obtient $\psi(p) = \pi \frac{e^{-pa}}{a}$ pour $p > 0$. Comme la fonction est impaire par rapport à p , on en déduit finalement que

$$\psi(p) = \pi \frac{e^{-|p|a}}{a} \dots \text{[3]}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy} \psi(p) dp &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy} \pi \frac{e^{-|p|a}}{a} dp = \frac{\pi}{a} \int_0^{+\infty} (e^{-ipy} e^{-pa} + e^{ipy} e^{-pa}) dp \\ &= \frac{2\pi}{a} \int_0^{+\infty} e^{-pa} \cos py dp = \frac{2\pi}{a} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pa+ipy} dp \right) = \frac{2\pi}{a} \frac{a}{a^2 + y^2} \\ &= \frac{2\pi}{a^2 + y^2} \quad \text{[3]} \end{aligned}$$

ce qui correspond à l'inversion de Fourier.

12. a. $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \underbrace{K(x-t, y_0)}_{=u} dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-u) K(u, y_0) du$ donc, comme f est 2π -périodique, $h(x+2\pi) = h(x)$. On sait aussi que h est \mathcal{C}^∞ ... 1

b. $x \mapsto \int_{-A}^A f(x-t) K(t, y_0) dt$ est continue et

$$\left| \int_{-A}^A f(x-t) K(t, y_0) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_\infty K(t, y_0) dt = \|f\|_\infty$$

(hypothèse de domination). De plus

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x-t) K(t, y_0) dt = \Phi_f(x, y_0)$$

donc, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a bien

$$\widehat{h}(n) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left(\int_{-A}^A f(x-t) K(t, y_0) dt \right) dx \quad \text{[3]}$$

Or le théorème de Fubini nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left(\int_{-A}^A f(x-t)K(t, y_0) dt \right) dx &= \int_{-A}^A K(t, y_0) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x-t) dx \right) dt \\ &= \int_{-A}^A K(t, y_0) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-t}^{2\pi-t} e^{-in(u+t)} f(u) du \right) dt \\ &= \int_{-A}^A K(t, y_0) e^{-int} \widehat{f}(n) dt \\ &= \widehat{f}(n) \int_{-A}^A e^{-int} K(t, y_0) dt \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \widehat{h}(n) &= \widehat{f}(n) \int_{\mathbb{R}} e^{-int} K(t, y_0) dt \\ &= \widehat{f}(n) \phi_h(0, y_0) \text{ avec } h(x) = e^{inx} \\ &= \widehat{f}(n) e^{-|n|y_0} \end{aligned}$$

Conclusion: on a $\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n) e^{-|n|y_0}$ **4**

QUATRIÈME PARTIE **11**

13. On sait que si $\lim_{\pm\infty} f = 0$ alors f est uniformément continue donc le II.9 s'applique. **2**

14. Soit X tel que $|t| \geq X \Rightarrow |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t)K(x-t, y) dt \right| \leq \underbrace{\int_{|t| \geq X} f(t)K(x-t, y) dt}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \|f\|_{\infty} \int_{|t| \leq X} K(x-t, y) dt.$$

On a deux choix :

- si y est grand ($y \geq a$) alors $K(x-t, y) = \frac{y}{\pi[(x-t)^2 + y^2]} \leq \frac{1}{\pi y} \leq \frac{1}{\pi a}$ et on prend $a \geq \frac{4\|f\|_{\infty}X}{\varepsilon\pi}$ d'où $K(x-t, y) \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{\infty}X}$ et $\|f\|_{\infty} \int_{|t| \leq X} K(x-t, y) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$; ... **3**

- si x est grand ($|x| \geq u > X$), on utilise l'inégalité $\frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \leq \frac{1}{2|x-t|}$ (conséquence de l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$) donc $K(x-t, y) \leq \frac{1}{2\pi|x-t|} \leq \frac{1}{2\pi(u-X)}$ car $|t| \leq X \Rightarrow |x-t| \geq u-X$. On prend $u \geq X + \frac{4X\|f\|_{\infty}}{\varepsilon\pi}$. On peut alors conclure comme lorsque y est grand. **3**

15. Vu le 14, on a $\lim_{|x|+y \rightarrow +\infty} \Phi_f(x, y) = 0$ **1**

16. On a vu que $\|\Phi\| = 1$ au II.5.b, on trouve ici aussi que $\|\Phi\| = 1$, il suffit de prendre par

exemple $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq n \\ n+1-|x| & \text{si } n \leq |x| \leq n+1. \text{ En effet} \\ 0 & \text{si } |x| \geq n \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t, y) dt \geq \int_{-n}^{+\infty} f_n(t)K(x-t, y) dt = \Phi_{f_n}(x, y) \geq \int_{-n}^n K(x-t, y) dt$$

et les deux termes qui réalisent l'encadrement tendent vers 1. **2**