MATHÉMATIQUES ENSAE 2001

Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$. Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y et on note $|||f|||$ la norme opérateur (norme triple) usuelle de toute application continue $f \in \mathcal{L}(X,Y)$. On notera toujours I l'application identité, quelque soit l'espace sous-jacent, $\mathrm{Tr}(u)$ la trace d'un endomorphisme u sur un espace vectoriel de dimension finie et $\det(u)$ son déterminant. Le déterminant d'une matrice carrée A sera noté $\det(A)$. Enfin $A^{\perp}$ désignera l'orthogonal (au sens du produit scalaire sous-jacent) d'un sous-espace A.

Soit E un espace vectoriel normé, on dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente dans E si, pour tout choix de signes $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ est convergente dans E.

Partie 1

I.1. Démontrer qu'une série de réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est convergente.

I.2. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $\|x_n\|$, une série $\sum x_n$ de E est inconditionnellement convergente ? (on démontrera le résultat annoncé).

On note c_0 l'espace des suites réelles convergentes vers 0, que l'on munit de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$. On rappelle que c'est un espace de Banach.

I.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $x^{(n)} \in c_0$ par $x_k^{(n)} = \dfrac{1}{n+1}$ si $k = n$ et 0 sinon. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente dans c_0.

I.4. Conclure

Partie II : lemme de Lewis

Dans cette partie, $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension n, où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On définit ℓ_2^n comme l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La norme est donc $\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$. On note $\beta_0 = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit

$$K = \{u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \mid |||u||| = 1\}.$$

On fixe une base $\beta = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de E. Pour $u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on définit $\Phi(u) = |\det(A)|$ où A est la matrice représentative de u dans les bases β_0 et β, I désigne l'application linéaire vérifiant $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $I(e_i) = \varepsilon_i$.

II.1. Montrer qu'il existe $u_0 \in K$ tel que $\sup_{u\in K} \Phi(u) = \Phi(u_0)$.

II.2. Montrer que u_0 est inversible.

II.3. On fixe $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que
$$|\det(I + \varepsilon u_0^{-1} \circ v)| \leqslant (1 + \varepsilon |||v|||)^n.$$

II.4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que, pour tout réel t, on a
$$\det(I + tf) = 1 + t\,\mathrm{Tr}(f) + o(t).$$

II.5. En déduire que u_0 vérifie : pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n|||v|||$.
Que vaut $\sup\{\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } |||v||| \leq 1\}$?

Partie III : lemme de Dvoretzky-Rogers

On reprend les notations de la partie II.

III.1. Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Soit F un sous-espace de ℓ_2^n de dimension i. On note $P \in \mathcal{L}(\ell_2^n)$ la projection orthogonale sur $F^\perp$.

a. Montrer que $\dfrac{n-i}{n} \leqslant |||u_0 \circ P|||$.

b. En déduire qu'il existe $y \in F^\perp$ tel que $\|u_0(y)\| \geqslant \dfrac{n-i}{n}$ et $\|y\|_2 = 1$.

III.2. Construire une base orthonormale $(y_1, \ldots, y_n)$ de ℓ_2^n telle que $\|u_0(y_j)\| \geq \dfrac{n-j+1}{n}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

III.3. Soit $m = [\frac{n}{2}] + 1$ où $[\frac{n}{2}]$ désigne la partie entière de $\dfrac{n}{2}$. On définit les vecteurs de E : $v_i = \|u_0(y_i)\|^{-1}.u_0(y_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.
Montrer que, pour tous $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$,
$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i v_i \right\| \leqslant 2 \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Partie IV : théorème de Dvoretzky-Rogers

Dans cette partie, $(X, \|.\|)$ désigne un espace de Banach de dimension infinie.

On fixe une suite de réels positifs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n^2$ converge. On pose $c = 2\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n^2\right)^{1/2}$.

IV.1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $n_0 = 0$ vérifiant $\sum\limits_{n \geqslant n_k} c_n^2 \leqslant c^2 4^{-k}$ pour tout entier k.

IV.2. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs X de norme 1 telle que, pour tout entier k et pour tous réels $a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}} \in \mathbb{R}$,
$$\left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i v_i \right\| \leq 2 \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

IV.3. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de X telle que $\|x_n\| = c_n$ et telle que la série $\sum x_n$ soit inconditionnellement convergente dans X.

IV.4. En déduire que, dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs telle que $\sum x_n$ est inconditionnellement convergente dans X et la série $\sum \|x_n\|$ diverge.

Partie V : opérateurs absolument sommants

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés dont on note respectivement les normes $\|.\|$ et $\|.\|'$. Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$; on note $\Lambda(T)$ l'ensemble des constantes $C \geqslant 0$ telles que, pour tout choix d'un nombre fini de vecteurs $x_1, \dots, x_p \in X$, on a

$$\sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leqslant C \sup\Big\{ \Big\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j \Big\| \ ; \ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in \{-1, 1\} \Big\}.$$

On dit que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est absolument sommante si $\Lambda(T)$ est non vide.

V.1. Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante. Montrer que $\Lambda(T)$ admet un plus petit élément que l'on notera $\pi(T)$.

V.2. Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante. Montrer que T est continue et comparer $|||T|||$ et $\pi(T)$.

V.3. Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble des applications absolument sommantes de X dans Y est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et que $T \mapsto \pi(T)$ est une norme sur cet espace.

V.4. Soit X l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme sup usuelle : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On désigne par Y l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x$. Soit J l'application de X dans Y qui à toute fonction continue sur $[0,1]$ associe elle-même.

Montrer que J est absolument sommante et calculer $\pi(J)$.

V.5. Montrer (de façon élémentaire) que l'identité de c_0 n'est pas absolument sommante.

V.6. Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E.

- **a.** Montrer que $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, où $M_p = \sup\Big\{ \Big\| \sum\limits_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j \Big\| \ ; \ \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p \in \{-1, 1\} \Big\}$.
- **b.** En déduire que si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente dans E alors la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- **c.** Soient $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, absolument sommante et une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ inconditionnellement convergente dans X. Que peut-on dire de $\sum \|T(x_i)\|'$?

V.7. A quelle condition nécessaire et suffisante l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante ? (Faire la synthèse du **IV** et du **V.6**.)

Partie VI : “unicité” dans le lemme de Lewis (réservé 5/2)

On reprend les notations de la partie II. On rappelle que $\ell_2^n = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. u_0 est l'application construite dans la partie II.

VI.1. Montrer que, pour tout automorphisme orthogonal w de $\mathbb{R}^n$, $u_0 \circ w$ a les mêmes propriétés que u_0 : on rappelle que u_0 est inversible, $|||u_0||| = 1$ et, pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leqslant n|||v|||$.

VI.2. Soit $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ (on rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des endomorphismes inversibles de $\mathbb{R}^n$).

- **a.** Montrer qu'il existe un endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$, symétrique défini positif tel que $f^* \circ f = s \circ s$.

b. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $f = u \circ s$.

On suppose qu'il existe $u_1 \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ ayant les mêmes propriétés que u_0 : u_1 est inversible, $|||u_1||| = 1$ et, pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_1^{-1} \circ v) \leqslant n|||v|||$.

VI.3. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $u_1 = u_0 \circ u \circ s$.

VI.4. Montrer que $\det(s) \leqslant 1$ et que $\mathrm{Tr}(s^{-1}) \leqslant n$.

VI.5. Montrer que si $t_1, \ldots, t_n > 0$ alors $\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t_k$. Étudier le cas d'égalité.

VI.6. Conclure