## CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATH ENSAE 2001

### Première partie

**I.1.** $(\Rightarrow)$ On prend $\varepsilon_n = \mathrm{sgn}\,(x_n)$, dans ce cas $\varepsilon_n x_n = |x_n|$ donc $\sum |x_n|$ converge.
$(\Leftarrow)$ $\sum \varepsilon_n x_n$ est absolument convergente donc convergente.

**I.2.** Montrons que $\sum x_n$ est inconditionnellement convergente ssi $\sum \|x_n\|$ converge.
$(\Rightarrow)$ On prend une base $\mathcal{B}$ de $E$ et, comme les normes sont toutes équivalentes, on choisit (sans restreindre la généralité de la démonstration) $\|x\| = \|x\|_\infty$ dans cette base. Si on écrit $x_{n,i}$ les coordonnées de $x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ de $E$ alors $\sum x_{n,i}$ est inconditionnellement convergente donc absolument convergente vu la première question et ceci pour tout $i$.
Comme chaque série coordonnée est absolument convergente, on en déduit que $\sum x_n$ est absolument convergente.
$(\Leftarrow)$ La réciproque est évidente.

**I.3.** $x^{(n)} = (0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, 0, \ldots)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{N} \varepsilon_n x^{(n)} = (\varepsilon_0, \frac{\varepsilon_1}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon_N}{N+1}, 0, \ldots)$ qui converge vers la suite $x \in c_0$ définie par $x_k = \dfrac{\varepsilon_k}{k+1}$ car $\left\| x - \sum\limits_{n=0}^{N} \varepsilon_n x^{(n)} \right\|_\infty = \dfrac{1}{N+2}$.
Conclusion : la série $\sum x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente.

**I.4.** On a $\|x^{(n)}\|_\infty = \dfrac{1}{n+1}$ et la série $\sum \|x^{(n)}\|_\infty$ diverge. Ceci prouve qu'en dimension infinie on n'a pas l'équivalence de la question 2.

### Deuxième partie

**II.1.** $K$ est un compact (fermé borné en dimension finie), $\Phi$ est continue ($A \mapsto \det A$ est continue en tant que fonction polynomiale, $u \mapsto A$ est continue en tant qu'application linéaire en dimension finie et $x \mapsto |x|$ est continue) donc $\Phi$ est bornée sur $K$ et atteint ses bornes.
Conclusion : il existe $u_0 \in K$ tel que $\sup\limits_{u \in K} \Phi(u) = \Phi(u_0)$.

**II.2.** On a évidemment $\Phi(I) = 1$. On pose alors $w = \dfrac{I}{|||I|||} \in K$, $\Phi(w) = \dfrac{1}{|||w|||^n}$ par conséquent $\Phi(u_0) \geq \Phi(w) > 0$ et en conclusion $u_0$ est inversible.

**II.3.** On remarque que si $|||w||| \leq 1$ alors $\Phi(w) \leq \Phi(u_0)$ (en effet, en posant $v = \dfrac{w}{|||w|||}$ alors $\Phi(w) = \underbrace{|||w|||^n}_{\leq 1} \underbrace{\Phi(v)}_{\leq \Phi(u_0)}$) donc, comme $|||u_0 + \varepsilon v||| \leq 1 + \varepsilon |||v|||$ (inégalité triangulaire) alors, en posant $w = \dfrac{u_0 + \varepsilon v}{1 + \varepsilon |||v|||}$ on obtient

$$\left| \det \left( \frac{u_0 + \varepsilon v}{1 + \varepsilon |||v|||} \right) \right| \leq |\det u_0|$$

soit $|\det u_0| \det(I + \varepsilon u_0^{-1} \circ v) \leq |\det u_0| (1 + \varepsilon |||v|||)^n$ et on obtient le résultat demandé en simplifiant par $|\det u_0| > 0$ (si $\det(u_0 + \varepsilon v) = 0$, c'est immédiat).
*Remarque* : on a noté $\det u_0$ le déterminant de la matrice de $u_0$ ce qui correspond ici à une notation impropre car $u_0$ n'est pas un endomorphisme.

**II.4.** Résultat classique sur les polynômes caractéristiques que l'on peut également démontrer en dérivant la fonction polynomiale $P(t) = \det(I_n + tA)$ où $A$ est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$P(t) = \det(C_1(t), \dots, C_n(t)) \text{ avec } C_i(t) = (ta_{1i}, \dots, 1 + ta_{ii}, \dots, ta_{ni})^{\mathrm{T}}$$

on a $P(0) = 1$ et

$$P'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_i'(t), \dots, C_n(t)) \text{ avec } C_i'(t) = (a_{1i}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{ni})^{\mathrm{T}}$$

donc $P'(0) = \mathrm{Tr}(A)$ puisque $\det(C_1(0), \dots, C_i'(0), \dots, C_n(0)) = a_{ii}$ et finalement $\det(\mathrm{Id} + tf) = 1 + t\,\mathrm{Tr}(f) + o(t)$ car $P(t) = P(0) + tP'(0) + o(t)$.

**II.5.** On rassemble les résultats des deux questions précédentes

$$1 + t\,\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) + o(t) = \det(\mathrm{Id} + tf) \leqslant |\det(\mathrm{Id} + tf)| \leqslant \underbrace{(1 + t|||v|||)^n}_{=1+nt|||v|||+o(t)}$$

soit, en soustrayant 1 et en divisant par $t > 0$, on obtient $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n|||v||| + o(1)$ et, en passant à la limite quand $t \to 0^+$,

$$\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n|||v|||.$$

Ensuite on a $\sup\{\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } |||v||| \leq 1\} \leq n$ or, pour $v = u_0$ on a égalité donc

$$\sup\{\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } |||v||| \leq 1\} = n$$

## Troisième partie

**III.1.** **a.** Soit $v = u_0 \circ P$, on applique le II.5, d'où

$$\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) = \mathrm{Tr}(P) = n - i \leq n|||u_0 \circ P|||$$

ce qui donne le résultat.

**b.** $|||u_0 \circ P||| = \sup\limits_{\|x\|_2 = 1} \|u_0 \circ P(x)\|$ et comme la sphère unité est compacte, la borne supérieure est atteinte donc $\exists x \in \ell_2^n$ t.q. $\|x\|_2 = 1$ et $|||u_0 \circ P||| = \|u_0 \circ P(x)\|$.

$P(x) \neq 0$ car $\|u_0 \circ P(x)\| > 0$, on peut alors poser $y = \dfrac{P(x)}{\|P(x)\|_2} \in F^{\perp}$ car $\mathrm{Im}\, P = F^{\perp}$.

Comme $\|P(x)\|_2 \leq 1$, on a :

$$\|u_0(y)\| = \frac{\|u_0 \circ P(x)\|}{\|P(x)\|_2} \geq |||u_0 \circ P||| \geq \frac{n - i}{n} \text{ et } \|y\|_2 = 1.$$

**III.2.** On sait qu'il existe un vecteur $y_1 \in E$ t.q. $\|y_1\|_2 = 1$ et $\|u_0(y_1)\| = 1$. Soit $F = \mathrm{Vect}(y_1)$ alors, grâce à la question précédente, on sait qu'il existe $y_2 \in F^{\perp}$ t.q. $\|y_2\|_2 = 1$ et $\|u_0(y_2)\| \geq \dfrac{n-1}{n}$. En outre on a $(y_1|y_2) = 0$.

On procède alors par récurrence. Supposons construite la famille orthonormale $(y_1, \dots, y_k)$ vérifiant $\forall j \in [1, k]$, $\|u_0(y_j)\| \geq \dfrac{n - j + 1}{n}$. On prend $F = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_k)$ et on choisit $y_{k+1}$ à l'aide de la question III.1.b. On a effectivement $\|u_0(y_{k+1})\| \geq \dfrac{n-k}{n}$, $\|y_{k+1}\|_2 = 1$ et $(y_j|y_{k+1}) = 0$ pour $j \leq k$ car $y_{k+1} \in F^{\perp}$. Ceci achève la récurrence.

Conclusion : on a ainsi construit une base orthonormale $(y_1, \dots, y_n)$ de $\ell_2^n$ telle que $\|u_0(y_j)\| \geq \dfrac{n - j + 1}{n}$ pour tout $j \in [1, n]$.

**III.3.** Si $j \leq m$ alors $\dfrac{n-j+1}{n} \geq \dfrac{n-m+1}{n} = \dfrac{n-[n/2]}{n} \geq 1/2$ donc $\dfrac{1}{\|u_0(y_j)\|} \leq 2$.

Posons $b_i = \dfrac{a_i}{\|u_0(y_i)\|}$, $b_i^2 \leq 4a_i^2$. On a $\sum\limits_{i=1}^m a_i v_i = \sum\limits_{i=1}^m b_i u_0(y_i) = u_0\left(\sum\limits_{i=1}^m b_i y_i\right)$ d'où

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^m a_i v_i\right\| &\leq \underbrace{|||u_0|||}_{=1}. \quad \underbrace{\left\|\sum_{i=1}^m b_i y_i\right\|_2}_{=(\sum\limits_{i=1}^m b_i^2)^{1/2} \text{ car } (y_i) \text{ b.o.n.}} \\ &\leq 2\left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right).\end{aligned}$$

## Quatrième partie

**IV.1.** On peut prendre $n_0 = 0$ car $\sum\limits_{n\geq 0} c_n^2 = \dfrac{c^2}{4} \leq c^2$.

La suite $u_p = \sum\limits_{n\geq p} c_n^2$ est décroissante de limite nulle.

On prend $n_1 = 1$ (qui convient bien ici) puis, par récurrence sur $k$, si on a choisi $n_k$ on prend pour $n_{k+1}$ le plus petit entier $\geq n_k + 1$ tel que $u_{n_{k+1}} \leq c^2 4^{-(k+1)}$.

**IV.2.** Soit $F_k$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $2(n_{k+1} - n_k) - 1$ (ceci est possible car $E$ est de dimension infinie), on a vu au III que l'on pouvait définir une suite $v_{n_k+i}$ de vecteurs de norme 1 telle que, pour tous réels $a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}$ on ait

$$\left\|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i v_i\right\| \leq 2\left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2\right)^{1/2}$$

ce qui est le résultat attendu.

**IV.3.** Posons $x_n = c_n v_n$ et montrons que, quelque soit le choix des $\varepsilon_n$, la série $\sum \varepsilon_n x_n$ converge. On utilise le critère de Cauchy, majorons $\left\|\sum\limits_{n=m}^{m+p} \varepsilon_n x_n\right\|$. On note $n_k$ le plus grand entier tel que $n_k + 1 \leq m$ et $n_h$ le plus petit entier tel que $m+p \leq n_h$ alors, en prenant la propriété du III.2 avec $a_n = \varepsilon_n c_n$ si $m \leq n \leq m+p$ et $a_n = 0$ si $n_k + 1 \leq n < m$ on a

$$\left\|\sum_{n=m}^{n_{k+1}} \varepsilon_n x_n\right\| \leq 2\left(\sum_{n=m}^{n_{k+1}} c_n^2\right)^{1/2} \leq 2c2^{-k},$$

de même avec $a_n = 0$ si $m+p < n \leq n_h$ on a

$$\left\|\sum_{n=n_{h-1}+1}^{m+p} \varepsilon_n x_n\right\| \leq 2\left(\sum_{n=n_{h-1}+1}^{m+p} c_n^2\right)^{1/2} \leq 2c2^{-(h-1)}.$$

D'où, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=m}^{m+p} \varepsilon_n x_n\right\| &\leq 2c(2^{-k} + 2^{-k-1} + \dots + 2^{-(h-1)}) \\ &\leq 4c2^{-k}.\end{aligned}$$

la série vérifie bien le critère de Cauchy, elle converge.

**IV.4.** Il suffit maintenant de choisir $c_n = \dfrac{1}{n+1}$.
*Remarque* : ceci généralise le résultat du I.4.

## Cinquième partie

**V.1.**
- $\Lambda(T)$ est un sous-ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$, il possède une borne inférieure $\pi(T)$.
- Montrons que $\pi(T) \in \Lambda(T)$.
Soit $h > 0$ alors $\pi(T)+h \in \Lambda(T)$ (en effet, $\Lambda(T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ car si $C \in \Lambda(T)$ alors $\forall C' \geq C$, $C' \in \Lambda(T)$). On a ainsi

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X^p,\ \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leq (\pi(T) + h) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| \ ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\}$$

et on sait que l'on peut permuter les quantificateurs $\forall$ donc $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X^p$,

$$\forall h > 0,\ \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leq (\pi(T) + h) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| \ ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\}$$

et quand $h \to 0$, on obtient

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X^p,\ \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leq \pi(T) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| \ ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\}$$

soit $\pi(T) \in \Lambda(T)$ c.q.f.d.

**V.2.** On prend $p = 1$ alors $\|T(x_1)\|' \leq \pi(T) \sup\{\underbrace{\|\varepsilon_1 x_1\|}_{=\|x_1\|} \ ;\ \varepsilon_1 = \pm 1\}$. Soit $T$ est continue et en outre $|||T||| \leq \pi(T)$ (et en général, on n'a pas égalité, cf. V.5).

**V.3.** On note $\mathcal{AS}(X, Y)$ l'ensemble des applications absolument sommantes de $X$ dans $Y$.
- $\mathcal{AS}(X, Y) \neq \emptyset$ car l'application nulle est absolument sommante et si $\pi(T) = 0$ alors $T = 0$ or, vu l'inégalité de la question 2, $\pi(T) = 0 \Rightarrow |||T||| = 0 \Rightarrow T = 0$.
- Si $T \in \mathcal{AS}(X, Y)$ alors $\lambda T \in \mathcal{AS}(X, Y)$ et on a $\pi(\lambda T) = |\lambda| \pi(T)$ (évident).
- Montrons l'inégalité triangulaire (et la stabilité pour $+$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \|(T+U)(x_j)\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\| + \sum_{j=1}^{p} \|U(x_j)\| \\
&\leq \pi(T) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\} + \pi(U) \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\} \\
&\leq [\pi(T) + \pi(U)] \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\}
\end{aligned}$$

donc $T + U \in \mathcal{AS}(X, Y)$ et $\pi(T + U) \leq \pi(T) + \pi(U)$.

**V.4.** $\sum_{j=1}^{p} |f_i|$ est continue sur $[0,1]$ donc $\exists x_0 \in [0,1]$ tel que $\sum_{i=1}^{p} |f_i(x_0)| = \left\| \sum_{i=1}^{p} |f_i| \right\|_\infty$. On pose $|f_j(x_0)| = \varepsilon'_j f_j(x_0)$ où $\varepsilon'_j = \pm 1$ selon le signe de $f_j(x_0)$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} |f_j(x_0)| &= \sum_{j=1}^{p} \varepsilon'_j f_j(x_0) \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon'_j f_j \right\|_\infty \\ &\leq \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j f_j \right\|_\infty ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\}.\end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 \sum_{j=1}^{p} |f_j(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=1}^{p} |f_j(x_0)|$ alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} \|J(f_j)\|_1 = \int_0^1 \sum_{j=1}^{p} |f_j(x)|\, \mathrm{d}x &\leqslant \sum_{j=1}^{p} |f_j(x_0| \\ &\leq \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j f_j \right\|_\infty ;\ \varepsilon_j = \pm 1 \right\}\end{aligned}$$

donc $J$ est absolument sommante et $\pi(J) \leq 1$.
Enfin en prenant $f = 1$ qui appartient à $X$ on obtient

$$1 = \|f\|_1 \leq \pi(J) \|f\|_\infty = \pi(J).$$

Conclusion : $\pi(J) = 1$.

**V.5.** C'est une conséquence immédiate de la partie I.
En effet, la série $\sum x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente mais n'est pas absolument convergente. On a $X_p = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x^{(j)} = (\varepsilon_0, \ldots, \frac{\varepsilon_p}{p+1}, 0, \ldots)$ donc $\|X_p\| = 1$. Or s'il existe $\pi(I)$ alors les sommes partielles $\sum_{j=1}^{p} \| \underbrace{I(x^{(j)})}_{=x^{(j)}} \|$ sont majorées et cela entraîne que la série $\sum x^{(j)}$ est absolument convergente ce qui est faux.

**V.6.** **a.** Soit $M_p = \left\| \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j \right\|$ (la borne supérieure est atteinte car on opère sur un ensemble fini) on utilise alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}2 \left\| \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| &= \left\| 2 \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j + x_{p+1} + \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j - x_{p+1} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j + x_{p+1} \right\| + \left\| \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j - x_{p+1} \right\| \leq 2 M_{p+1}\end{aligned}$$

ce qui donne effectivement $M_p \leq M_{p+1}$.

**b.** On raisonne par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{p\to+\infty} M_p = +\infty$.
Montrons par récurrence sur $n$ qu'il existe une suite $(p_n)$ d'entiers strictement croissante et une famille $(\varepsilon_j) \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\left\|\sum\limits_{j=0}^{p_n} \varepsilon_j x_j\right\| \geq n$.

- $n = 0$ : immédiat.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre $n$. Choisissons $p_{n+1} > p_n$ tel que $M_{p_{n+1}} \geq 1 + n + 2M_{p_n}$. On écrit que $M_{p_{n+1}} = \left\|\sum\limits_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j\right\|$ et on pose $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$ pour $j \in [p_n + 1, p_{n+1}]$.
On a alors

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon_j x_j\right\| &= \left\|\sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j - \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon'_j x_j + \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon_j x_j\right\| \\ &\geq \left\|\sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j\right\| - 2M_{p_n} \\ &\geq M_{p_{n+1}} - 2M_{p_n} \geq n+1.\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum x_n$ n'est pas inconditionnellement convergente ce qui est contraire à l'hypothèse donc la suite $M_p$ est croissante et majorée donc convergente.

**c.** Si $T$ est absolument sommante et $\sum x_n$ inconditionnellement convergente alors, en notant $M = \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} M_p$ qui existe d'après la question précédente, on a

$$\sum_{j=0}^{p} \|T(x_j)\|' \leq \pi(T) M$$

donc la série $\sum \|T(x_j\|'$ est convergente.

**V.7.**
- On a vu au IV.4 que dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe une suite $(x_n)$ de vecteurs inconditionnellement convergente mais non absolument convergente.
- On vient de voir à la question précédente que, si $I$ est absolument sommante alors toute suite inconditionnellement convergente est absolument convergente.

On a donc l'implication suivante : si l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante alors cet espace est de dimension finie.
Montrons la réciproque : supposons que $\dim E = n$, on munit $E$ d'une base et on choisit la norme 1 associée, on va montrer que $\sum\limits_{j=1}^{p} \|x_j\|_1 \leqslant n \sup\{\left\|\sum\limits_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\|_1\}$.
En effet, $\sum\limits_{j=1}^{p} \|x_j\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_{ij}|\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} |x_{ij}|\right)$.
Soit $i_0$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{p} |x_{i_0 j}| = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{p} |x_{ij}|\right)$ et prenons $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x_{i_0 j})$ alors, vu que l'on a

évidemment $n\sum_{j=1}^{p}|x_{i_0j}| \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}|x_{ij}|\right) = \sum_{j=1}^{p}\|x_j\|_1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j x_j\right\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j x_{ij}\right| \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{p}|x_{i_0j}| \\ &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\|x_j\|_1\end{aligned}$$

Conclusion : $I$ est absolument sommante.
Finalement on a l'équivalence : l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante ssi cet espace est de dimension finie.

## Sixième partie

**VI.1.** Soit $u_1 = u_0 \circ w$.

- $u_1$ inversible : évident.
- $|||u_0 \circ w||| = \sup_{\|x\|_2=1}\|u_0 \circ w(x)\| = \sup_{\|y\|_2=1}\|u_0(y)\| = |||u_0|||$ car $w$ est bijectif et conserve la norme.
- $\mathrm{Tr}(u_1^{-1}\circ v) = \mathrm{Tr}(w^{-1}\circ u_0^{-1}\circ v) = \mathrm{Tr}(u_0^{-1}\circ v\circ w^{-1}) \leq n|||v\circ w^{-1}||| = n|||v|||$ car $w^{-1}$ est aussi un automorphisme orthogonal.

**VI.2.** **a.** Classique : $f^*\circ f$ est diagonalisable (endomorphisme autoadjoint) et il existe une base orthonormée dans laquelle $M(f^*\circ f) = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i > 0$. On prend pour $s$ l'endomorphisme de matrice $\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_i})$ dans cette base. $s$ est bien symétrique défini positif (donc inversible).

**b.** Soit $u = f\circ s^{-1}$ alors $u^* = s^{-1}\circ f^*$ et $u^*\circ u = s^{-1}\circ f^*\circ f\circ s^{-1} = \mathrm{Id}$ donc $u$ est orthogonal et $f = u\circ s$.

**VI.3.** On applique la question précédente à $f = u_0^{-1}\circ u_1$.

**VI.4.** On a $s = u^{-1}\circ u_0^{-1}\circ u_1$ et $s$ symétrique $> 0$ d'où

$$0 < \det s = |\det s| = \underbrace{|\det u^{-1}|}_{=1}.\frac{|\det u_1|}{|\det u_0|}$$

car le déterminant d'un automorphisme orthogonal vaut $\pm 1$. Or, par définition, $|\det u_0| \geq |\det u_1|$ donc $\det s \leq 1$.
Enfin, comme $s^{-1} = u_1^{-1}\circ(u_0\circ u)$ on écrit

$$\mathrm{Tr}(s^{-1}) \leq n|||u_0\circ u||| \underbrace{=}_{\text{cf V.1}} n|||u_0||| = n.$$

**VI.5.** Classique : on prend le logarithme et on utilise sa stricte concavité. Il y a égalité pour $t_1 = \ldots = t_n$.

**VI.6.** Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ désignent les valeurs propres de $s$ ($\lambda_i > 0$) alors $\det s = \lambda_1\ldots\lambda_n \leq 1$ et $\mathrm{Tr}(s^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_1}+\cdots+\dfrac{1}{\lambda_n} \leq n$.

Si on applique l'inégalité de 5 à $t_i = \dfrac{1}{\lambda_i}$ on obtient

$$1 \leq \left( \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leq 1.$$

On a ainsi égalité dans l'inégalité du 5 ce qui signifie que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$.
Conclusion : $s = I$ ($s$ est diagonalisable et admet une seule valeur propre 1) et $u_1 = u_0 \circ u$ donc il y a "unicité" de $u_0$ à un automorphisme orthogonal près.