SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE, ESPACES ULTRAMÉTRIQUES

On appelle <u>*espace métrique*</u> tout ensemble E muni d'une application $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$ les propriétés suivantes :

(i) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation),
(ii) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ (symétrie),
(iii) $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Par exemple, $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace métrique.
On définit la topologie d'un espace métrique avec les *boules ouvertes* :

$$B(x, r) = \{y \in E |\, \mathrm{d}(x, y) < r\},\ r > 0.$$

Enfin, un ensemble est dit <u>*ultramétrique*</u> ssi la propriété (iii) (inégalité triangulaire) est remplacée par
(iii)bis $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \sup(\mathrm{d}(x, z), \mathrm{d}(z, y))$.

Partie I - <u>Généralités sur les espaces ultramétriques</u>

(1) Montrer que si $\mathrm{d}(x, z) < \mathrm{d}(z, y)$ alors $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(z, y)$ (tout triangle est isocèle).

(2) Si $y \in B(x, r)$ alors prouver que $B(x, r) = B(y, r)$ (tout point d'une boule ouverte est centre de cette boule).

(3) Prouver que, si l'on prend deux boules ouvertes, alors soit elles sont disjointes, soit l'une est contenue dans l'autre.

Partie II - <u>Un exemple d'espace ultramétrique</u>.

On prend pour E l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Si p est un nombre premier, $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, on peut écrire $a = p^m a'$, $b = p^n b'$ où $a' \wedge p = 1$, $b' \wedge p = 1$ et donc $\dfrac{a}{b} = p^r \dfrac{a'}{b'}$.
r est appelé valuation de $\dfrac{a}{b}$: $r = v\left(\dfrac{a}{b}\right)$, on pose par convention $v(0) = +\infty$.
Si $\alpha \in]0, 1[$, on définit une distance sur $\mathbb{Q}$ par $\nu(x - y) = \alpha^{v(x-y)} = \mathrm{d}(x, y)$ et $\nu(0) = 0$ appelée distance p-adique.

(1) Montrer que $(\mathbb{Q}, \nu)$ est un espace ultramétrique et qu'en outre $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$.
On dit qu'une suite (u_n) converge vers x dans $(\mathbb{Q}, \nu)$ ssi $\lim\limits_{n \to +\infty} \nu(u_n - x) = 0$ (cette notion étant indépendante du choix du réel α).

(2) Étudier les limites des suites : (en prenant $p = 2$)
(i) $u_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$,
(ii) $v_n = 1 + 2 + 2^3 + \cdots + 2^{2n+1}$.

(3) Montrer que pour que la suite (u_n) soit de Cauchy, il suffit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \nu(u_{n+1} - u_n) = 0$.

(4) On suppose dans les questions a, b, c, d que $b \wedge p = 1$ et $a \wedge p = 1$.
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, p - 1]$ unique entier solution de $bx \equiv a[p]$; montrer que l'on ramène ainsi la résolution de $bx_n \equiv a[p^n]$ à celle de $by_{n-1} \equiv c[p^{n-1}]$ où $c = \dfrac{a - bx_0}{p}$.

b) En déduire que l'on peut trouver une solution "unique" modulo p^n à l'équation $bx \equiv a[p^n]$ qui s'écrit

$$x = u_0 + u_1 p + \cdots + u_{n-1}p^{n-1} + Xp^n$$

où $u_i \in [0, p-1]$, X étant un entier relatif arbitraire, les u_i étant uniques et indépendants de n.

c) En déduire que $\frac{a}{b}$ est la limite p-adique de la suite $u_0 + u_1 p + \cdots + u_n p^n$ et prouver que la suite (u_k) est périodique à partir d'un certain rang.
Donner un algorithme permettant le développement de $\frac{a}{b}$.

d) Conclure enfin : tout rationnel non nul est la limite p-adique d'une suite $p^r \sum\limits_{k=0}^{n} u_k p^k$ où $r \in \mathbb{Z}$ et $u_0 \neq 0$.

e) Donner les suites p-adiques de limite :
  (i) $\frac{1}{5}$ avec $p = 2$,
  (ii) $\frac{5}{7}$ avec $p = 3$.

On montre que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour cette métrique (encore une fois !). Le complété est l'ensemble des séries $p^r \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n p^n$ qui est appelé corps p-adique.
(On notera une application importante, le théorème de Minkowski-Hasse qui dit qu'une forme quadratique à coefficients rationnels s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ ssi elle s'annule sur $\mathbb{Q}$ ainsi que sur tous les corps p-adiques).

Partie III - Le théorème d'Ostrowski.

On veut chercher toutes les métriques sur $\mathbb{Q}$ (non nécessairement ultramétriques), i.e. toutes les distances ν vérifiant en outre $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$. On écartera la métrique discrète : $\nu(x) = 1$ si $x \neq 0$, $v(0) = 0$.

(1) Prouver que pour connaître ν, il suffit de connaître ν sur l'ensemble des nombres premiers.

On suppose $\nu \leqslant 1$ sur $\mathbb{N}$ et on étudie le cas où il existe un nombre premier p tel que $\nu(p) < 1$.

(2) Soit q un autre nombre premier tel que $\nu(q) < 1$.
  a) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $up^a + vq^b = 1$.
  b) En prenant a et b arbitrairement grands, en déduire une impossibilité.
  c) En déduire que ν est une distance p-adique.

On suppose maintenant que $\exists p$ premier tel que $\nu(p) > 1$; on pose $\nu(p) = p^a$ où $a > 0$.

(3) a) Si $x \in \mathbb{N}$ prouver que $\nu(x) \leqslant x$.
  b) En écrivant $x \in \mathbb{N}$ en base p : $x = x_0 + x_1 p + \cdots + x_n p^n$ (avec $x_n \neq 0$), prouver que $\nu(x) \leqslant \frac{p^{a+1}}{p^a - 1}(p^n)^a \leqslant cx^a$ où c est une constante indépendante de x à préciser.
  c) Comme, pour $m \in \mathbb{N}$, $(\nu(x))^m = \nu(x^m)$, prouver que $\nu(x) \leqslant c^{1/m}x^a$ et que $\nu(x) \leqslant x^a$.

(4) On reprend les notations du 3.
  a) On pose $x = p^{n+1} - y$ où $y \leqslant p^{n+1} - p^n$. Montrer que $\nu(x) \geqslant p^{a(n+1)}b$ où $b = 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^a$.
  b) En déduire que $\nu(x) \geqslant x^a$.
  c) Donner alors la conclusion générale concernant les métriques sur $\mathbb{Q}$.