ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2001

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Première partie

On désigne par S le plan complexe $\mathbf{C}$ privé du sous-ensemble $-\mathbf{N}-1/2 = \{-1/2, -3/2, \dots\}$. Pour tout s dans S on note (E_s) l'équation différentielle

$$2x(1-x)f''(x) + \Big(2s+1-(2s+3)x\Big)f'(x) - sf(x) = 0\ .$$

On cherche une solution de (E_s) sous la forme d'une série entière

$$f_s(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(s)x^n \quad \text{avec} \quad a_0 = 1\ .$$

1. Écrire $a_{n+1}(s)$ en fonction de $a_n(s)$.

2. Déterminer la limite de $\dfrac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)}$ lorsque s n'est pas un entier négatif ou nul.

3. Montrer que le rayon de convergence de la série est égal à 1 ou à $+\infty$ et que sa somme $f_s(x)$ est effectivement une solution de (E_s).

4. Montrer que la fonction $(s,x)\mapsto f_s(x)$ est continue sur $S\times]-1,1[$.

5. On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E'_s) \qquad t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t) + s(1-s)(1-t^2)F(t) = 0 \quad , \quad t\in]0,1[\ .$$

a) Ramener sa résolution à celle de (E_s) en cherchant $F(t)$ sous la forme $t^s f(t^2)$. [On rappelle que $\dfrac{\mathrm{d}t^s}{\mathrm{d}t} = st^{s-1}$.]

b) Montrer que, si s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$, les fonctions $\Phi_s(t) = t^s f_s(t^2)$ et $\Phi_{1-s}(t) = t^{1-s} f_{1-s}(t^2)$ forment une base de l'espace des solutions de (E'_s).

Deuxième partie

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $y > 0$; on pose $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\, z = y$.

6. Démontrer les résultats suivants :

a) Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, le nombre complexe $\dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$ est bien défini et appartient à $\mathcal{H}$ (on précisera sa partie imaginaire).

b) Si l'on pose $A_\theta(z) = \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$, on obtient une action du groupe additif $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{H}$.

c) La fonction réelle sur $\mathcal{H}$: $z \mapsto c(z) = \dfrac{|z|^2 + 1}{2\ \mathrm{Im}\ z}$ est invariante par les transformations A_θ, c'est-à-dire $c\Big(A_\theta(z)\Big) = c(z) \quad \forall z \in \mathcal{H},\ \forall \theta \in \mathbf{R}$.

d) Si z est différent de i, on a $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$ si et seulement si $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$.

7. On fixe un point z_0 de $\mathcal{H}$, distinct de i.

a) Vérifier que l'orbite de z_0 sous l'action du groupe $\mathbf{R}$ est incluse dans le cercle de centre $ic(z_0)$ et de rayon $(c(z_0)^2 - 1)^{1/2}$.

b) Montrer que l'orbite de z_0 est égale à ce cercle.

8. On définit une application indéfiniment différentiable U de $]0, 1[\times\mathbf{R}$ dans $\mathcal{H}$ par $U(t, \theta) = A_\theta(it)$.

a) Calculer le déterminant jacobien de U, qu'on notera $J(t, \theta)$.

[On utilisera la formule $J(t,\theta) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{\partial U}}{\partial t}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right)$].

b) Démontrer les assertions suivantes :

(1) $U(]0, 1[\times\mathbf{R})$ est égal à l'ensemble $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ privé du point i ;

(2) on a $U(t, \theta) = U(t', \theta')$ si et seulement si $t = t'$ et $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$.

Troisième partie

On désigne par $C^\infty(\mathcal{H}')$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur $\mathcal{H}'$ et par $C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\mathrm{per}}$ celui des fonctions de classe C^∞ sur $]0,1[\times\mathbf{R}$ qui sont périodiques de période π par rapport à θ.

9. Montrer qu'en associant à toute fonction φ de $C^\infty(\mathcal{H}')$ la fonction $\psi = \varphi \circ U$, on obtient un isomorphisme, qu'on notera V, de $C^\infty(\mathcal{H}')$ sur $C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\mathrm{per}}$.

On considère l'opérateur différentiel sur $\mathcal{H}'$ défini par

$$D = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ ;$$

on admettra que, pour toute $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $D(\varphi \circ A_\theta) = D(\varphi) \circ A_\theta$.

On désigne par $\widetilde{D}$ l'endomorphisme de $C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\mathrm{per}}$, défini par

$$\widetilde{D} = V \circ D \circ V^{-1} \ .$$

10. Pour tout élément (t,θ') de $]0,1[\times\mathbf{R}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\tau_\theta(t,\theta') = (t, \theta + \theta') \ .$$

Vérifier que l'on a :

a) $V(\varphi) \circ \tau_\theta = V(\varphi \circ A_\theta)$ pour $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$, $\theta \in \mathbf{R}$.

b) $\widetilde{D}(\psi \circ \tau_\theta) = \widetilde{D}(\psi) \circ \tau_\theta$ pour $\psi \in C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\mathrm{per}}$, $\theta \in \mathbf{R}$.

On désigne par s un nombre complexe et par φ_s la fonction sur $\mathcal{H}$ définie par

$$\varphi_s(z) = \int_0^\pi (\mathrm{Im}\ A_\theta(z))^s \mathrm{d}\theta \ .$$

11. Montrer que φ_s est de classe C^∞, est invariante par les A_θ, et est solution de l'équation $D(\varphi_s) = s(s-1)\varphi_s$.

[On pourra considérer la fonction $\omega(z) = (\mathrm{Im}\ z)^s$.]

12. On définit une fonction F_s sur $]0,+\infty[$ par $F_s(t) = \varphi_s(it)$.

Comparer $F_s(t)$ et $F_s\left(\frac{1}{t}\right)$.

13. Montrer que $F_s = F_{1-s}$.

[On pourra faire le changement de variable cotan $\theta = u$ dans l'intégrale définissant $F_s(t)$].

On suppose maintenant que s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$.

On pourra admettre que, si une fonction ψ est de la forme $\psi(t, \theta) = F(t)$, on a

$$\widetilde{D}(\psi)(t, \theta) = \frac{1}{1 - t^2}[t^2(1 - t^2)F''(t) - 2t^3 F'(t)] \ .$$

14. Démontrer l'existence d'une famille de nombres complexes λ_s tels que l'on ait

$$F_s = \lambda_s \Phi_s + \lambda_{1-s} \Phi_{1-s}$$

(les fonctions Φ_s et Φ_{1-s} ont été définies à la question **5.b)**.

15. Supposant Re $s < 1/2$, exprimer λ_s sous la forme d'une intégrale sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Nota : L'ensemble $\mathcal{H}$ est appelé *demi-plan de Poincaré* et est le cadre d'une géométrie non euclidienne ; les transformations $z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ $(a, b, c, d$ réels et $ad - bc = 1)$ jouent un rôle analogue à celui des déplacements du plan euclidien, les transformations A_θ un rôle analogue à celui des rotations. Enfin l'opérateur différentiel D est l'analogue du laplacien.

* *
*

Rapport de MM. Pierre-Vincent KOSELEFF et Claude WAGSCHAL, correcteurs.

À partir de l'étude d'une équation différentielle linéaire du second ordre (E_s) dépendant du paramètre s complexe, le sujet proposait tout d'abord de considérer des solutions en séries entières, puis d'étudier des transformations dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ ce qui permettait par la suite d'exprimer une solution particulière de l'équation différentielle à partir d'une fonction φ_s définie sur $\mathcal{H}$ par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Très rares sont les candidats qui ont traité l'ensemble des questions.

Compte tenu du barème adopté, la moyenne des notes des 1295 candidats français est de 9,1 avec un écart-type de 3,8 ; la répartition est la suivante :

$0 < \mathrm{N} < 4$	5%
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	37%
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	35%
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	17%
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	6%

À noter 8 copies dont la note est inférieure à 2/20 et 10 copies ayant obtenue la note 20/20.

Les trois premières questions concernant la recherche d'une solution $f_s(x)$ de l'équation différentielle développable en série entière ne posaient pas de difficulté particulière. Il est agréable de constater que les candidats font peu de fautes de calculs. En revanche peu se posent la question de savoir si les formules qu'ils considèrent sont définies. Ainsi, pour beaucoup, le rapport a_{n+1}/a_n a une limite alors que a_n pourrait être nul à partir d'un certain rang.

La première question délicate est la continuité de la fonction de deux variables $(s,x) \mapsto f_s(x)$. Parmi ceux qui ont tenté de la traiter (une moitié), très peu ont pensé à prouver une convergence uniforme sur un voisinage compact. On retrouve souvent les affirmations, surprenantes à ce niveau, de la convergence uniforme, voire normale, d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.

La question **6.b** a été rarement correctement traitée. De nombreux candidats ne prennent pas la peine d'expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E'_s), forme un espace vectoriel de dimension 2. Peu ont remarqué que $(E'_s) = (E'_{1-s})$. Quant à la liberté de la famille (Φ_s, Φ_{1-s}), nombreux ont évoqué justement leur wronskien en 0, alors qu'*a priori* les solutions sont définies sur $]0,1[$. Nombreux sont ceux qui ont voulu identifier terme à terme le développement des deux séries (non entières). Enfin, on pouvait résoudre cette question en comparant les équivalents à l'origine sans oublier que le paramètre s était complexe.

D'une façon générale, de nombreux candidats considèrent des majorations alors qu'ils manipulent des nombres complexes.

Dans la **seconde partie**, il s'agissait de feuilleter le demi-plan de Poincaré privé du point i par des cercles, vus comme orbites d'une action de groupe.

Nombreux sont les candidats qui semblent ignorer la définition d'une action de groupe, alors même qu'ils la démontreront par la suite dans la question **10.a**. Les candidats semblent peu familiers de la notion d'orbite, en particulier du fait que celles-ci forment une partition.

Nombreux sont les candidats qui ont effectué de lourds calculs alors qu'un peu de réflexion permettait souvent de les réduire considérablement. Nous sommes restés très vigilants à ce que ceux-ci soient réellement effectués sans nous contenter de « simplifications » miraculeuses conduisant au résultat.

La question **7.b**, demandant de montrer que les orbites étaient des cercles a été très peu traitée. Très rares (une dizaine) ont pensé à utiliser la connexité. Une petite poignée s'en sont sortis en donnant explicitement $\tan(\theta)$, tel que $z = A_\theta(z_0)$. Encore fallait-il vérifier que ce nombre était réel (ce qui est équivalent à $c(z) = c(z_0)$).

Une majorité de candidat ne parvient pas à un calcul juste du jacobien de U. Il est consternant de trouver des réponses non réelles ou même assez souvent, la réponse 0.

Dans la question **8**, il s'agissait de montrer que $\mathcal{H}'$ est la réunion disjointe des orbites des points it, où $0 < t < 1$. On pouvait y arriver de façon plus ou moins élégante par le calcul mais il est décevant de constater que très peu de candidats ont une vision géométrique de la situation.

La question **9** de la **troisième partie** a été très rarement correctement traitée. Peu de candidats se sont posés la question de la construction de φ, telle que $\psi = V(\varphi)$. Bien qu'un nombre important aient compris que U définissait une bijection entre $\mathcal{H}'$ et $]0, 1[\times[0, \pi[$, très peu de candidats utilisent la notion de difféomorphisme local particulièrement appropriée ici.

Dans la question **10.b**, de nombreux candidats invoquent une « associativité » de la composition alors qu'il s'agit d'appliquer un opérateur sur une composée de fonctions.

Le caractère C^∞ de la fonction φ_s a été en général très mal démontré. Nombreux sont ceux qui se contentent d'affirmer que l'intégrande étant C^∞, il en va de même pour φ_s, sans autre précision. Nous sommes surpris que très peu de candidats n'utilisent les théorèmes au programme avec hypothèse de domination.

La question **12** pouvait se traiter en une ligne en composant φ_s par $A_{\pi/2}$.

La question **13** a souvent été incorrectement traitée, car les candidats n'ont pas su mener à bien le changement de variable suggéré.

Dans la question **14**, que de nombreux candidats ont abordée, il s'agissait essentiellement de montrer que $\mu_s = \lambda_{1-s}$, une fois obtenu $F_s = \lambda_s \Phi_s + \mu_s \Phi_{1-s}$, ce que très peu ont fait.

Enfin la question **15** a été traitée par une petite poignée de candidats qui ont en général bien compris de quoi il en retournait, oubliant quelquefois que s pouvait ne pas être réel.