CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE L'X MATH 1 2001

Première partie $\boxed{26}$

(1) On trouve directement

$$a_{n+1}(s)(n+1)(2n+2s+1) = a_n(s)(\underbrace{s+n(2s+1)+2n^2}_{=(2n+1)(n+s)}). \qquad \boxed{2}$$

(2) $\dfrac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)} = \dfrac{(2n+1)(n+s)}{(n+1)(2n+2s+1)} \to 1$ (le rapport est bien défini car le dénominateur ne s'annule jamais et le numérateur n'est jamais nul). .... $\boxed{1}$

(3) On distingue deux cas :

- si $s \notin -\mathbb{N}$ alors $R = 1$ vu la question précédente ; .... $\boxed{1}$
- si $s \in -\mathbb{N}$ alors $a_{s+1}(s) = 0$ et, par une récurrence immédiate, $a_{s+p} = 0$ donc f_s est une fonction polynomiale. .... $\boxed{4}$

Il est immédiat de vérifier que f_s est solution de (E_s).

(4) En résolvant la récurrence du **2.** on obtient

$$a_n(s) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+s-1}{k+s+1/2}$$

qui est une fonction continue de s. .... $\boxed{2}$

Posons $u_n(s,x) = a_n(s)x^n$ qui est continue sur $S\times]-1,1[$. Soit $(s_0,x_0) \in S\times]-1,1[$ alors il existe $r > 0$ tel que $K_r = \overline{D}(s_0,r)\times[x_0-r, x_0+r] \subset S\times]-1,1[$.

Montrons que la série $\sum u_n(s,x)$ converge normalement sur K_r :

$$\frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)} = \frac{2n^2+n(2s+1)+s}{2n^2+n(2s+3)+2s+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{n(s+2)+2s+1}{n(n+1)(2n+2s+1)}$$

donc, si s_1 désigne le maximum de $|s|$ sur $\overline{D}(s_0,r)$ et s_2 le minimum, alors, pour n assez grand on aura $\left|\dfrac{n(s+2)+2s+1}{n(n+1)(2n+2s+1)}\right| \leqslant \dfrac{n(s_1+2)+2s_1+1}{n(n+1)(2n+2s_2+1)} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit l'existence de N_{s_0} tel que $\forall n \geqslant N_{s_0}$, $\left|\dfrac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)}\right| \leqslant 1$ et par conséquent, $a_n(s) \leqslant a_{N_{s_0}}(s) \leqslant M$ (car cette dernière fonction est bornée sur $\overline{D}(s_0,r)$.

On a ainsi $|u_n(s,x)| \leqslant Mk^n$ où $k = \max(|x_0-r|, |x_0+r|) < 1$ pour $n \geqslant N_{s_0}$ et pour $n < N_{s_0}$, $|u_n(s,x)| \leqslant \sup\limits_{(s',x')\in K_r} |u_n(s',x')|$.

En conclusion, on a la convergence normale de la série $\sum u_n(s,x)$ sur K_r et comme chaque fonction u_n est continue, on obtient la continuité de $(s,x) \mapsto f_s(x)$ en (s_0,x_0) sur K_r donc en tout point de $S\times]-1,1[$. .... $\boxed{6}$

(5) a) On pose donc

$$\begin{aligned}
F(t) &= t^s f(t^2) && \times s(1-s)(1-t^2)\\
F'(t) &= st^{s-1}f(t^2) + 2t^{s+1}f'(t^2) && \times -2t^3\\
F''(t) &= s(s-1)t^{s-2}f(t^2) + (4s+2)t^s f'(t^2) + 4t^{s+2}f''(t^2) && \times t^2(1-t^2)
\end{aligned}$$

le coefficient de $f''(t^2)$ vaut $4t^{s+4}(1-t^2)$,

le coefficient de $f'(t^2)$ vaut $t^{s+2}(4s+2) - t^{s+4}(4s+6)$,
le coefficient de $f(t^2)$ vaut $-2st^{s+2}$, d'où, en simplifiant par $2t^{s+2}$, on obtient l'équation (E_s). . . . . $\boxed{3}$

b) On remarque que $(E'_s) \Leftrightarrow (E'_{1-s})$ donc Φ_s et Φ_{1-s} sont solutions de (E'_s). . . . . $\boxed{2}$
Pour $t \in]0,1[$ l'ensemble des solutions de (E'_s) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2. Montrons que Φ_s et Φ_{1-s} forment une famille libre.
Soit $W_\Phi(t) = \begin{vmatrix} \Phi_s(t) & \Phi_{1-s}(t) \\ \Phi'_s(t) & \Phi'_{1-s}(t) \end{vmatrix}$ alors en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la deuxième ligne on a

$$\begin{aligned} W_\Phi(t) &= \begin{vmatrix} t^s f_s(t^2) & t^{1-s} f_{1-s}(t^2) \\ t^s(f_s(t^2))' & t^{1-s}(f_{1-s}(t^2))' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^s f_s(t^2) & t^{1-s} f_{1-s}(t^2) \\ st^{s-1} f_s(t^2) & (1-s)t^{-s} f_{1-s}(t^2) \end{vmatrix} \\ &= tW_f(t^2) + (1-2s) f_s(t^2) f_{1-s}(t^2) \end{aligned}$$

fonction continue qui tend vers $1-2s$ lorsque $t \to 0$.
Or si (Φ_s, Φ_{1-s}) est liée alors $W(t)$ s'annule toujours et par conséquent $\lim\limits_{t\to 0} W(t) = 0$ ce qui est impossible donc (Φ_s, Φ_{1-s}) est libre c.q.f.d. . . . . $\boxed{5}$
Remarque : on peut aussi prendre les équivalents en 0 (si $\Phi_{1-s}(t) = \alpha\Phi_s(t)$ alors $t^{1-s} \sim \alpha t^s$ ce qui est impossible).

Deuxième partie $\boxed{38}$

(6) a) $\operatorname{Im}(z\sin\theta) = y\sin\theta$ donc, si $\theta \equiv 0[\pi]$ alors $z\sin\theta + \cos\theta \neq 0$ et si $\theta \equiv 0[\pi]$ alors $\cos\theta = \pm 1$ donc, de même $z\sin\theta + \cos\theta \neq 0$ d'où $A_\theta(z)$ est bien défini. . . . . $\boxed{1}$
Partie imaginaire : $\dfrac{y}{(x\sin\theta+\cos\theta)^2 + y^2\sin^2\theta} = \dfrac{y}{|z\sin\theta+\cos\theta|^2} > 0$. . . . . $\boxed{3}$

b) $\theta \mapsto A_\theta$ est une action de $(\mathbb{R},+)$ sur $\mathcal{H}$:

- $A_\theta(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$,
- $A_\theta(z)$ est le rapport des 2 composantes du vecteur $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ donc par composition $A_{\theta'}(A_\theta(z))$ est le rapport des composantes du vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $A_{\theta'}(A_\theta(z)) = A_{\theta'+\theta}(z)$,
- $A_0(z) = z$.

Conclusion : $A_\theta \in \mathfrak{S}_{\mathcal{H}}$ et $\theta \mapsto A_\theta$ définit bien une action de $(\mathbb{R},+)$ sur $\mathcal{H}$. . . . . . $\boxed{4}$

c) On a

$$\begin{aligned} c(A_\theta(z)) &= \frac{\left|\dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta} + \cos\theta\right|^2 + 1}{2\operatorname{Im}(A_\theta(z))} = \frac{|z\cos\theta - \sin\theta|^2 + |z\sin\theta + \cos\theta|^2}{2y} \\ &= \frac{\big(|z|^2\cos^2\theta + \sin^2\theta - (z+\bar{z})\cos\theta\sin\theta\big) + \big(|z|^2\sin^2\theta + \cos^2\theta + (z+\bar{z})\cos\theta\sin\theta\big)}{2y} \\ &= \frac{x^2+y^2+1}{2y} = c(z). \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

d) $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z) \Leftrightarrow A_{\theta-\theta'}(z) = z$ d'où, en simplifiant, on a $(z^2+1)\sin(\theta'-\theta) = 0$.
Si $z \neq i$, $z^2+1 \neq 0$ ($\operatorname{Im} z > 0$) d'où $\sin(\theta'-\theta) = 0$ soit $\theta - \theta' \in \pi\mathbb{Z}$.
La réciproque est immédiate. . . . . $\boxed{2}$

(7) a) c est constante sur une orbite (cf. **6.c**) et

$$c(z) = c(z_0) \Leftrightarrow \frac{|z|^2+1}{2y} = c(z_0) \Leftrightarrow x^2 + (y - c(z_0))^2 = c(z_0)^2 - 1 > 0$$

donc l'orbite de z_0 est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre $ic(z_0)$ et de rayon $(c(z_0)^2-1)^{1/2}$. 2

b) Soit $\varphi\ : \theta \in [0,\pi] \mapsto A_\theta(z_0)$.

- φ est continue et injective (vu le **6.d** sur $[0,\pi[$,
- $\varphi([0,\pi])$ est connexe par arc et est contenu dans $\mathcal{C}(iz_0, (c(z_0)^2-1)^{1/2})$,
- $\varphi(0) = \varphi(\pi) = z_0$ donc $\varphi([0,\pi]) = \mathcal{C}(iz_0, (c(z_0)^2-1)^{1/2})$. 2

Pour montrer que tout le cercle est atteint, nous allons utiliser le théorème du relèvement. La fonction $\theta \mapsto A_\theta(z_0)$ est de classe au moins C^1 sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ avec un dénominateur ne s'annulant pas, de même pour la fonction $g : \theta \mapsto \dfrac{A_\theta(z_0) - ic(z_0)}{\sqrt{c(z_0)^2-1}}$. Comme on a constamment $|g(\theta)| = 1$, la fonction g se relève en $e^{i\varphi(\theta)}$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, par **6)d)**, g est injective sur $[0,\pi[$ (par exemple), donc φ a fortiori aussi. Or une fonction continue injective est strictement monotone. De plus on a $g(0) = g(\pi)$, ce qui impose $\varphi(0) = \varphi(\pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Nécessairement dans cette dernière relation $k \neq 0$, donc φ décrit un intervalle d'amplitude au moins 2π , i.e. tout le cercle est atteint... 6

Remarque : on peut tout faire ici par le calcul :

- Soit $z \in \mathcal{C}$, on a $|z - ic(z_0)|^2 = c(z_0)^2 - 1$ et en développant on obtient

$$|z|^2 + c(z_0)^2 + izc(z_0) - i\bar{z}c(z_0) = c(z_0)^2 - 1$$

qui est équivalent à $c(z) = c(z_0)$.

- On cherche maintenant $\theta \in]-\pi/2, \pi/2]$ tel que $z = A_\theta(z_0) = \dfrac{z_0\cos\theta - \sin\theta}{z_0\sin\theta + \cos\theta}$. Cette dernière relation est équivalente à $(zz_0+1)\sin\theta = (z_0 - z)\cos\theta$.
  - Si $zz_0 = -1$ alors on prend $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.
  - Si $zz_0 \neq -1$ alors on prend $\theta = \operatorname{Arctan}\dfrac{z_0 - z}{zz_0+1}$ après avoir vérifié que $\dfrac{z_0 - z}{zz_0+1} \in \mathbb{R}$: en effet, en développant la relation $\dfrac{z_0 - z}{zz_0+1} = \dfrac{\bar{z}_0 - \bar{z}}{\bar{z}\bar{z}_0 + 1}$ on obtient la relation équivalente $c(z_0) = c(z)$ ce qui permet de conclure.

(8) a) On écrit $A_\theta(it) = U(t,\theta) = X(t,\theta) + iY(t,\theta)$ alors

$$J_U = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial t} & \dfrac{\partial X}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} & \dfrac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \operatorname{Im}\left(\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right).$$ 2

Comme $U(t,\theta) = \dfrac{it\cos\theta - \sin\theta}{it\sin\theta + \cos\theta}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{i\cos\theta(it\sin\theta + \cos\theta) - i\sin\theta(it\cos\theta - \sin\theta)}{(it\sin\theta + \cos\theta)^2} \\ &= \frac{i}{(it\sin\theta+\cos\theta)^2} = -1 - U^2\end{aligned}$$ 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\theta} &= \frac{-it\sin\theta-\cos\theta)(it\sin\theta+\cos\theta)-(it\cos\theta-\sin\theta)^2}{(it\sin\theta+\cos\theta)^2}\\ &= \frac{1-t^2}{(it\sin\theta+\cos\theta)^2}\end{aligned} \qquad \boxed{2}$$

d'où finalement $\dfrac{\overline{\partial U}}{\partial t}.\dfrac{\partial U}{\partial\theta} = \dfrac{i(t^2-1)}{|it\sin\theta+\cos\theta|^4} = \dfrac{i(t^2-1)}{|t^2\sin\theta+\cos^2\theta|^2}$ et en conclusion $J(t,\theta)=\dfrac{(t^2-1)}{|t^2\sin\theta+\cos^2\theta|^2}$ .... $\boxed{2}$

b) (1) Pour $\theta\in\mathbb{R}$, $U(t,\theta)$ décrit l'orbite de $z_0=it$. $c(z_0)=\dfrac{t^2+1}{2t}=\dfrac{1}{\sin 2\varphi}$ en posant $\varphi=\operatorname{Arctan} t\in]0,\pi/4[$ donc, lorsque $t\in]0,1[$, $c(z_0)$ décrit $]1,+\infty[$.
Pour $z\neq i$, $z\in\mathcal{H}$ alors z est dans l'orbite de it pour t choisi tel que l'on ait $c(z_0)=c(it)$ donc $U(]0,1[\times\mathbb{R})=\mathcal{H}'$. .... $\boxed{4}$
Si on pose $a=c(z_0)=\dfrac{t^2+1}{2t}$, l'équation du cercle orbite de $z_0=it$ s'écrit $x^2+y^2-2ay+1=0$ donc, pour tout $z=x+iy\in\mathcal{H}'$, il existe un cercle unique donné par $a=\dfrac{x^2+y^2+1}{2y}>1$.

(2) Si $U(t,\theta)=U(t',\theta')$ alors ces deux nombres complexes appartiennent à la même orbite et les orbites réalisent une partition de $\mathcal{H}'$ donc $t=t'$.
Puis $U(t,\theta)=U(t,\theta')\Rightarrow\theta=\theta'[\pi]$ (cf. **6.d**). .... $\boxed{4}$
La réciproque est immédiate.

TROISIÈME PARTIE $\boxed{56}$

(9) V est évidemment linéaire.
Pour $t\in]0,1[$, $\theta\in[0,\pi[$ alors $J(t,\theta)\neq 0$ et U est une bijection de $]0,1[\times]0,\pi[$ sur $\mathcal{H}''=\mathcal{H}'\backslash]0,i[$. Donc, en vertu du théorème d'inversion globale, U est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\pi[$ sur $\mathcal{H}''$.
On peut donc poser $\varphi_1=\psi\circ U^{-1}\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H}'')$. .... $\boxed{5}$
De même U est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[\times]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ sur $\mathcal{H}'$ privé de la demi-droite $]i,+\infty i[$ et on peut poser $\varphi_2=\psi\circ U^{-1}$.
φ_1 et φ_2 coïncident sur $]0,1[\times]\frac{\pi}{2},\pi[$ on peut donc définir le $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme φ sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ par $\varphi(t,\theta)=\begin{cases}\varphi_1(t,\theta) & \text{si } \theta\in]0,\pi[\\ \varphi_2(t,\theta) & \text{si } \theta\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\end{cases}$ que l'on prolonge par π-périodicité pour $\theta\in\mathbb{R}$.
V est bien alors un isomorphisme. .... $\boxed{6}$

(10) **a.** $V(\varphi)\circ\tau_\theta(t,\theta')=\varphi\circ U(t,\theta+\theta')$ et

$$\begin{aligned}V(\varphi\circ A_\theta)(t,\theta') &= \varphi\circ A_\theta\circ A_{\theta'}(it)=\varphi\circ A_{\theta+\theta'}(it)\\ &= \varphi\circ U(t,\theta+\theta')=V(\varphi)\circ\tau_\theta(t,\theta').\end{aligned} \qquad \boxed{3}$$

b. On a, en posant $\varphi=V^{-1}(\psi)$:

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(\psi\circ\tau_\theta) &= V\circ D\circ V^{-1}(\underbrace{\psi\circ\tau_\theta}_{=V(\varphi)\circ\tau_\theta})=V\circ D(\varphi\circ A_\theta)\\ &= V\circ D(\varphi\circ A_\theta).\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(\psi)\circ\tau_\theta &= V[D\circ V^{-1}(\psi)]\circ\tau_\theta\\ &= V(D\circ V^{-1}(\psi)\circ A_\theta) = V\circ D(\varphi\circ A_\theta).\end{aligned}$$ $\boxed{3}$

(11) La fonction $y\mapsto y^s$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $z\mapsto\omega(z)=\big(\operatorname{Im} z\big)^s$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{H}$. Donc, par composition, la fonction $\omega\circ A_\theta$ est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport aux trois variables (x,y,θ) pour $z=x+iy\in\mathcal{H}$ et $\theta\in[0,\pi]$ (ce qu'on notera $(x,y,\theta)\in\mathcal{H}\times[0,\pi]$). Cela signifie en particulier qu'on peut dériver partiellement à tout ordre la fonction $\big(A_\theta(z)\big)^s$, avec des dérivées partielles obtenues continues des trois variables (x,y,θ) sur $\mathcal{H}\times[0,\pi]$. On peut donc appliquer de manière répétée le théorème de dérivation des intégrales propres à paramètre, ce qui montre que φ_s est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{H}$. . . . . $\boxed{5}$

Pour tout $z\in\mathcal{H}$ et tout $\theta_0\in\mathbb{R}$ on a

$$\varphi_s\big(A_{\theta_0}(z)\big)=\int_0^\pi\big(\operatorname{Im} A_\theta\circ A_{\theta_0}(z)\big)^s\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi\big(\operatorname{Im} A_{\theta+\theta_0}(z)\big)^s\,\mathrm{d}\theta\ .$$

Or, comme la fonction $\theta\mapsto A_\theta(z)$ est π-périodique et qu'on intègre sur une période, on peut effectuer le changement de variables $\theta'=\theta+\theta_0$ dans la dernière intégrale sans avoir à changer les bornes. On obtient ainsi $\varphi_s\circ A_{\theta_0}=\varphi_s$. . . . . $\boxed{4}$

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres évoqués ci-dessus, on peut dériver φ_s sous l'intégrale, soit:

$$D\big(\varphi_s(z)\big)=\int_0^\pi D(\omega\circ A_\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Mais on a admis (puisque ω est $\mathcal{C}^\infty$) que $D(\omega\circ A_\theta)=D(\omega)\circ A_\theta$. De plus,

$$D(\omega)=y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)(y^s)=s(s-1)y^s=s(s-1)\omega.$$

On en déduit bien $D(\varphi_s)(z)=\displaystyle\int_0^\pi s(s-1)\omega\circ A_\theta(z)\,\mathrm{d}\theta=s(s-1)\varphi_s$. . . . . $\boxed{4}$

(12) On remarque que $A_{\pi/2}\Big(\dfrac{i}{t}\Big)=\dfrac{-1}{i/t}=it$, donc l'invariance de φ_s par $A_{\pi/2}$ montre la propriété: $F_s(t)=\varphi_s(it)=\varphi_s\circ A_{\pi/2}\Big(\dfrac{i}{t}\Big)=\varphi_s\Big(\dfrac{i}{t}\Big)=F_s\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$. . . . . $\boxed{2}$

(13) On a $F_s(t)=\displaystyle\int_0^\pi\frac{t^s}{(\cos^2\theta+t^2\sin^2\theta)^s}\,\mathrm{d}\theta$. Comme l'intégrande précédente est intégrable car continue de θ, on peut effectuer le changement de variable donné par le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\theta\mapsto u=\operatorname{cotan}\theta$ de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$.

On obtient alors, avec $\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ et $\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+u^2$:

$$F_s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^s}{(t^2+u^2)^s(u^2+1)^{1-s}}\,\mathrm{d}u.$$ $\boxed{3}$

On en déduit une expression intégrale de $F_{1-s}\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ dans laquelle on effectue le changement de variable $u=v/t$ (justifié par $t>0$):

$$\begin{aligned}F_{1-s}\Big(\frac{1}{t}\Big)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{(1/t^2+u^2)^{1-s}(u^2+1)^s}\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^{1-s}}{(t^2u^2+1)^{1-s}(u^2+1)^s}\,\mathrm{d}u\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^s}{(v^2+1)^{1-s}(v^2+t^2)^s}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

On voit ainsi que $F_{1-s}\Big(\dfrac{1}{t}\Big)=F_s(t)$ et on conclut par **12)**. . . . . $\boxed{2}$

(14) Montrons que F_s est solution de (E'_s). Posons comme suggéré $\psi(t,\theta) = F_s(t)$. Alors, suivant ce qui est admis, puis par définition,

$$\tilde{D}(\psi)(t,\theta) = \frac{1}{1-t^2}\big(t^2(1-t^2)F''_s(t) - 2t^3F'_s(t)\big) = V \circ D \circ V^{-1} \circ \psi(t,\theta). \qquad \boxed{2}$$

Or, par invariance de φ_s par A_θ,

$$\psi(t,\theta) = F_s(t) = \varphi_s(it) = \varphi_s \circ A_\theta(it) = \varphi_s \circ U(t,\theta) = V(\varphi_s)(\theta,t). \qquad \boxed{2}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} V \circ D \circ V^{-1} \circ \psi(t,\theta) &= V \circ D(\varphi_s) = D(\varphi_s) \circ U(t,\theta) \\ &\overset{\mathbf{11)}}{=} s(s-1)\varphi_s \circ U(t,\theta) = s(s-1)F_s(t). \end{aligned}$$

On a donc finalement pour tout $t \in]0,1[$,

$$\frac{1}{1-t^2}\big(t^2(1-t^2)F''_s(t) - 2t^3F'_s(t)\big) = s(s-1)F_s(t),$$

ce qui est l'équation (E'_s). . . . . $\boxed{3}$
D'après la première partie (**5)b)**), on a donc l'existence d'une famille de scalaires (λ_s, μ_s) telle que $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} + 1/2,\ F_s = \lambda_s\Phi_s + \mu_s\Phi_{1-s}$.
Mais les fonctions F_s et F_{1-s} sont identiques, donc par unicité de la décomposition dans une base, on a $\lambda_{1-s} = \mu_s$, cqfd. . . . . $\boxed{2}$

(15) On a d'après ce qui précède et la première partie:

$$\frac{F_s(t)}{t^s} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\big(\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta\big)^s} = \lambda_s f_s(t^2) + \lambda_{1-s}t^{1-2s}f_{1-s}(t^2).$$

Par hypothèse $Re(1-2s) > 0$, donc $t^{1-2s} \to 0$ quand $t \to 0$. Comme de plus les fonctions f_s sont continues et valent 1 en 0, le troisième membre de l'égalité ci-dessus admet la limite fini λ_s quand $t \to 0$. . . . . $\boxed{4}$
Or, le deuxième membre de cette égalité peut se réécrire (par symétrie par rapport à $\pi/2$) $2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\big(\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta\big)^s}$. L'intégrande apparaissant dans cette intégrale est continue des deux variables $(t,\theta) \in [0,1]\times[0\pi/2[$ et est dominée indépendamment de $t \in [0,1]$ par la fonction

$$\frac{1}{\big|(\cos^2\theta)^s\big|} = \frac{1}{(\cos\theta)^{2\,\mathrm{Re}\,s}} = \big(1+\tan^2\theta\big)^{\mathrm{Re}\,s}.$$

Au voisinage de $\pi/2$, on a $\tan\theta \sim \dfrac{1}{\pi/2-\theta}$, donc la fonction $\big(1+\tan^2\theta\big)^{\mathrm{Re}\,s}$ qui est équivalente à $\dfrac{1}{(\pi/2-\theta)^{2\,\mathrm{Re}\,s}}$ est intégrable au voisinage de $\pi/2$, donc sur $[0,\pi/2[$, puisque $2\,\mathrm{Re}\,s < 1$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique donc et montre que l'intégrale est une fonction continue de t en 0.

Finalement, quand $t \to 0$, on trouve à la limite :

$$\lambda_s = 2\int_0^{\pi/2} \big(1+\tan^2\theta\big)^s\, \mathrm{d}\theta\ .$$

Si on veut, on peut en utilisant le changement de variables $\theta \leftarrow \dfrac{\pi}{2} - \theta$ réécrire cette intégrale en

$$\lambda_s = \int_0^\pi \big(1+\mathrm{cotan}^2\,\theta\big)^s\, \mathrm{d}\theta. \qquad \boxed{6}$$