SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE

Partie I

I.1. En utilisant les formules d'Euler, f se met sous la forme

$$f(x)=\sum_{j=-n}^{n}\alpha_j e^{ijx}.$$

Donc, avec $t=e^{ix}$, on aura $f(x)=t^{-n}Q(t)$ où Q est un polynôme en t de degré $\leqslant 2n$. Vu que l'application $x\in[\alpha,\alpha+2\pi[\mapsto e^{ix}\in\mathbb{C}$ est injective, on en déduit que le polynôme Q a $2n+1$ racines distinctes, il est donc identiquement nul.

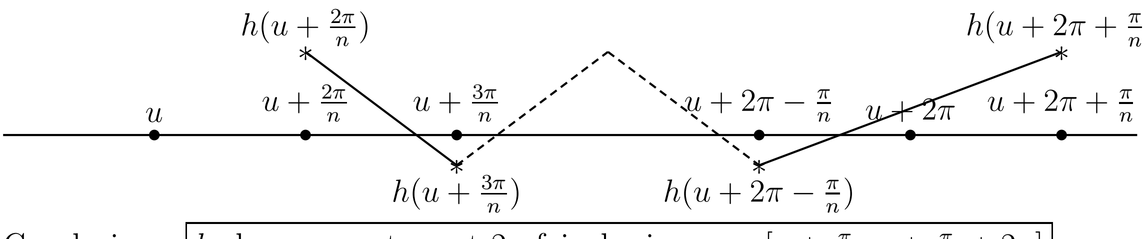
Conclusion : f est identiquement nulle sur $[\alpha,\alpha+2\pi[$ et par 2π-périodicité, $f=0$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : $(\cos t)^{n-k}(\sin t)^k$ appartient aussi à $\mathcal{T}_n$ (toujours grâce aux formules d'Euler) ainsi que toute combinaison linéaire de telles fonctions.

I.2. On a évidemment $\|s\|=|a|$ et $\|s'\|=n|a|$ d'où le résultat : $\boxed{\|s'\|=n\|s\|}$.

I.3. On remarque au préalable que, pour f 2π-périodique, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=\sup\limits_{x\in[u,u+2\pi[}|f(x)|$.

a. Le signe de $h(u+\frac{(2k+1)\pi}{2n})=(-1)^k\dfrac{\|g'\|}{n}-g(u+\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ est celui de $(-1)^k$, ce qui représente en tout $2n-1$ changements de signe sur $[u+\frac{\pi}{2n},u+2\pi-\frac{\pi}{2n}[$. Par continuité à gauche de h en $u+2\pi+\frac{\pi}{2n}$, il existe $x\in]u+2\pi-\frac{\pi}{2n},u+2\pi+\frac{\pi}{2n}[$ tel que $h(x)>0$ donc h change au moins $2n$ fois de signe sur $[u+\frac{\pi}{n},u+2\pi+\frac{\pi}{n}[$.
S'il y avait strictement plus que $2n$ changements de signe, alors grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on aurait $2n+1$ racines pour h et, en vertu du 1, h serait nulle car $h\in\mathcal{T}_n$. Cette dernière conclusion est impossible car $h(u+\frac{2\pi}{n})=\dfrac{g'(u)}{n}-g(u+\frac{2\pi}{n})$ est strictement positif.
On peut faire le dessin suivant :



Conclusion : $\boxed{h \text{ change exactement } 2n \text{ fois de signe sur } [u+\frac{\pi}{2n},u+\frac{\pi}{2n}+2\pi]}$.

b. On a $h'(x)=\|g'\|\cos[n(x-u)]-g'(x)$ donc $h'(u)=0=h'(u+2\pi)$.
On a vu au a) que h s'annule $2n$ fois sur l'intervalle $[u+\frac{\pi}{2n},u+\frac{\pi}{2n}+2\pi[$ et comme h est 2π-périodique, h s'annule aussi $2n$ fois sur $[u,u+2\pi[$.
Grâce au théorème de Rolle on sait que h' s'annule au moins $2n-1$ fois sur l'intervalle $]u,u+2\pi[$ et en rajoutant les annulations aux bornes, on peut conclure :
Conclusion : $\boxed{h' \text{ s'annule au moins } 2n+1 \text{ fois sur } [u,u+2\pi]}$.

c. Comme g' passe par un maximum en u alors $g''(u)=0$.
$h''(x)=-n\|g'\|\sin[n(x-u)]-g''(u)$ et $h''(u)=h''(u+2\pi)=g''(u)=0$. On utilise là aussi le théorème de Rolle et la même argumentation qu'au b pour conclure (avec $2n+1$ annulations pour h') :

h'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi[$.
D'après le 1, on sait que $h''=0$, donc $h'(x)=h'(u)=0$. $h(x)$ est alors constante et on a vu au a qu'elle s'annulait donc $h=0$ et $\boxed{g(x)=\dfrac{\|g'\|}{n}\sin[n(x-u)]}$.

d. On a $g(u+\frac{\pi}{2n})=\dfrac{\|g'\|}{n}$ donc $n\|g\| \geqslant \|g'\|$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $g'(u)>n\|g\|$. Si $g'(u)=-\|g'\|$, on peut faire le même raisonnement avec la fonction $-g$ et obtenir une impossibilité.
Conclusion : $\boxed{\|g'\| \leqslant n\|g\|}$.

I.4. À partir de l'inégalité obtenue au 3.d et grâce à une récurrence immédiate on obtient $\boxed{\|f^{(k)}\| \leqslant n^k\|f\|}$.
On obtient l'égalité avec les fonctions $\cos(nx+\alpha)$.

Partie II

II.1. a. Si on indice la fonction C par C_n alors la formule $\cos[(n+1)t]+\cos[(n-1)t] = 2\cos t\cos nt$ nous permet d'avoir la formule de récurrence suivante

$$C_{n+1}(x)=2xC_n(x)-C_{n-1}(x)$$

qui, avec les résultats $C_0=1$ et $C_1=x$, par une récurrence simple, nous permet d'affirmer que C est un polynôme.
Si on fait de plus l'hypothèse de récurrence suivante $\deg C_k = k$ alors comme $\deg C_{n+1}=1+\deg C_n$ on peut conclure $C_n\in\mathcal{P}_n$ pour tout n.
On a ensuite, et de manière immédiate, $\boxed{N(C)=1}$.

b. Là encore, on fait une récurrence, la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$.
On suppose que c'est vrai à l'ordre n, à l'ordre $n+1$, on écrit

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)t| &= |\sin nt\cos t+\sin t\cos nt| \leqslant |\sin nt|+|\sin t| \text{ car } |\cos kt|\leqslant 1\\ &\leqslant (n+1)|\sin t| \text{ en utilisant l'hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$

Par dérivation des fonctions composées, pour $x\neq\pm1$, on a

$$\begin{aligned}|C'(x)| &= n|\sin(n\operatorname{Arccos} x)|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &\leqslant n^2|\sin(\operatorname{Arccos} x)|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=n^2\end{aligned}$$

car $\sin(\operatorname{Arccos} x)=\sqrt{1-x^2}$.
Comme C est un polynôme, cette inégalité est aussi valable pour $x=\pm1$.
On peut alors prouver que $C'(1)=n^2$ par récurrence. Comme $C_0'(1)=0$ et $C_1'(1)=1$ alors

$$\begin{aligned}C_n'(1) &= 2C_{n-1}'(1)+2C_{n-1}(1)-C_{n-2}'(1)\\ &= 2(n-1)^2+2-(n-2)^2=n^2\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{N(C')=n^2}$.
(On pouvait aussi, en posant $t=\operatorname{Arccos} x$, avoir $C'(x)=n\dfrac{\sin nt}{\sin t}$ et lorsque $t\to0$, $C'(x)\to n^2$.)

II.2. a. Au 1.b, on a vu que $|C'(x)| = n|\sin(n \operatorname{Arccos} x)| \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On peut avoir l'expression explicite des racines de C :

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{(i-1)\pi}{n}\right).$$

d'où $\operatorname{Arccos} x_i = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{(i-1)\pi}{n}$ donc $|\sin(n \operatorname{Arccos} x_i)| = 1$ et

$$\boxed{|C'(x_i)| = \frac{n}{\sqrt{1-x_i^2}}}.$$

b. Il suffit de prouver cette inégalité pour $x \geqslant 0$ car $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est paire, et comme $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est aussi décroissante, il suffit de prouver que $n\sqrt{1-x_1^2} \geqslant 1$ (car $x_1^2 = x_n^2$).
On a donc $n\sqrt{1-x_1^2} = n \sin \dfrac{\pi}{2n} \geqslant \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ en utilisant le résultat du 1.b.

II.3. a. On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{Q(x)}{C(x)}$ et on obtient :

$$\boxed{\frac{Q(x)}{C(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(x_i)}{(x-x_i)C'(x_i)}}$$

car toutes les racines de C sont simples et $\deg Q < \deg C$ (ceci marche même si $Q(x_i) = 0$). On a la formule demandée en multipliant par $C(x)$ qui est supposé non nul (cette formule est valable même si $Q(x_i) = 0$).
Remarque : on pouvait aussi utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange $L_i(x) = \dfrac{C(x)}{(x-x_i)C'(x_i)}$.

b. Ceci est la question la plus délicate de ce problème.
On distingue deux cas selon que $|x| \leqslant x_1$ ou $|x| > x_1$ en supposant dans le deuxième cas que $|x| \leqslant 1$.

• Premier cas $|x| \leqslant x_1$. Vu le 2.a, on sait que $\sqrt{1-x^2} \geqslant \dfrac{1}{n}$ donc

$$\forall x \in [x_n, x_1],\ M(Q) \geqslant |Q(x)|\sqrt{1-x^2} \geqslant \frac{|Q(x)|}{n}$$

et en conclusion

$$\sup_{x \in [x_n, x_1]} |Q(x)| \leqslant nM(Q).$$

• Deuxième cas $|x| > x_1$. On utilise le 3.a assorti de la remarque très importante suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|C(x)|}{|x-x_i|} = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{C(x)}{x-x_i}\right| = |C'(x)|.$$

car x est en dehors des racines de C donc $C(x)$ garde un signe constant, de même pour $x - x_i$. La dernière égalité est obtenue en appliquant le résultat du 3.a au polynôme $Q = C'$.

On a donc (3.a)

$$\begin{aligned}
|Q(x)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|Q(x_i)|.|C(x)|}{|x-x_i|.|C'(x_i)|} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{|Q(x_i)|\sqrt{1-x_i^2}|C(x)|}{n|x-x_i|} \text{ par le 2.b} \\
&\leqslant \frac{M(Q)}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{|C(x)|}{|x-x_i|} = \frac{M(Q)}{n}|C'(x)| \text{ grâce à la remarque préliminaire} \\
&\leqslant \frac{M(Q)}{n} N(C') = nM(Q) \text{ car on a vu au 1.b que } N(C') = n^2
\end{aligned}$$

On a donc là aussi $\sup\limits_{|x|>x_1} |Q(x)| \leqslant nM(Q)$ et en conclusion :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,+1]} |Q(x)| = N(Q) \leqslant nM(Q)}$$

pour tout polynôme de $\mathcal{P}_{n-1}$.

II.4. a. Soit $f(t) = P(\cos t)$ alors $f \in \mathcal{T}_n$ grâce à la remarque faite à la fin du I.1 donc on peut appliquer le I.4 :

$$|f'(t)| = |P'(\cos t)|.|\sin t| \leqslant n\|f\| = nN(P)$$

car $f(-t) = f(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup\limits_{t\in[0,\pi]} |f(t)|$.

Comme $|\sin t| = \sqrt{1-x^2}$, on obtient l'inégalité $\boxed{|P'(x)| \leqslant nN(P)(1-x^2)^{-1/2}}$ en divisant par $\sqrt{1-x^2}$ qui est supposé non nul.

b. Ce qui nous sert ici, c'est l'inégalité ci-dessus sans diviser par $\sqrt{1-x^2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
N(P') &\leqslant nM(P') \text{ grâce au 3.b} \\
&\leqslant n^2 N(P) \text{ grâce à l'inégalité précédente}
\end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité en remplaçant P par P' qui est de degré $n-1$, on a

$$N(P'') \leqslant (n-1)^2 N(P') \leqslant [n(n-1)]^2 N(P).$$

Le résultat demandé s'obtient par une récurrence simple :
on fait l'hypothèse de récurrence suivante, à l'ordre k :

$$N(P^{(k)}) \leqslant \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2 N(P)$$

alors, comme $P^{(k)} \in \mathcal{P}_{n-k}$, on déduit que

$$N(P^{(k)\prime}) \leqslant (n-k)^2 N(P^{(k)})$$

et donc, vu l'hypothèse de récurrence, on a : $\boxed{N(P^{(k)}) \leqslant \left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 N(P)}$.

c. On utilise la formule de Taylor sur $\mathcal{P}_n$: si $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ d'où

$$N'(P) = \max_{k\in[0,n]} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} \leqslant \max_{k\in[0,n]} \frac{1}{k!}\left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 .N(P)$$

et, la fonction $x \mapsto P(x)$ étant une fonction continue, elle atteint ses bornes, donc

$$N(P) = |P(x_0)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k\right| \leqslant |a_0| + \cdots + |a_n| \leqslant (n+1)N'(P).$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{n+1}N(P) \leqslant N'(P) \leqslant \max_{k\in[0,n]} k!(C_n^k)^2.N(P).}$$

Remarque : Si on pose $f(k) = k!(C_n^k)^2$ alors $\max f(k)$ est obtenu pour $k_0 = [\theta] + 1$ avec $\theta = \dfrac{1}{2}[2n + 1 - \sqrt{4n+5}]$ (en étudiant $\dfrac{f(k+1)}{f(k)} - 1$).

Partie III

III.1. a. D'après la majoration de Lagrange dans la formule de Taylor, on sait que

$$|f(x+y) - P_x(y)| \leqslant \frac{|y|^n}{n!} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(n)}(x+ty)|$$

d'où $|P_x(y)| \leqslant |f(x+y)| + \dfrac{|y|^n}{n!} \sup\limits_{t\in[0,1]} |f^{(n)}(x+ty)|$ donc, vu que $|y| \leqslant 1$

$$\boxed{N(P_x) \leqslant \|f\| + \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}.}$$

b. On sait que $f^{(k)}(x) = P_x^{(k)}(0)$ donc

$$\begin{aligned}|f^{(k)}(x)| &\leqslant \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2 N(P_x) \text{ d'après le II.4.b}\\ &\leqslant \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2 \left(\|f\| + \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\right) \text{ d'après la question précédente}\end{aligned}$$

On en déduit tout d'abord que $\boxed{f^{(k)} \text{ est bornée}}$, puis que l'on a la majoration

$$\|f^{(k)}\| \leqslant \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2 \left(\|f\| + \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\right).$$

III.2. On remplace la fonction $x \mapsto f(x)$ par la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ dans le résultat précédent, ceci nous donne

$$|\lambda^k f^{(k)}(\lambda x)| \leqslant \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2 \left(\|f\| + |\lambda|^n \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\right)$$

(en utilisant la propriété $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(\lambda x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ pour $\lambda > 0$)

soit, en divisant par $|\lambda|^k$ et en passant à la borne supérieure sur x :

$$\|f^{(k)}\| \leqslant \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2 \left(|\lambda|^{-k}\|f\| + |\lambda|^{n-k} \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\right).$$

Si $\|f^{(n)}\| = 0$ alors f est polynomiale et bornée donc constante, en particulier $f^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 1$ et l'inégalité demandée est évidente. On suppose pour la suite de cette question que $\|f^{(n)}\| \neq 0$.

On étudie alors la fonction de $|\lambda|$ qui figure au second membre de cette inégalité, cette fonction passe par un minimum pour $|\lambda| = \left(\dfrac{a}{b}\dfrac{k}{n-k}\right)^{1/n}$ et ce minimum vaut $a^{\frac{n-k}{n}}b^{\frac{k}{n}}\dfrac{n}{k}\left(\dfrac{k}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{n}}$ où on a posé $a = \|f\|$ et $b = \dfrac{\|f^{(n)}\|}{n!}$. On n'a pas tout à fait ce que l'énoncé demande, on a mieux mais c'est plus compliqué !
L'idée qui nous fournit le résultat est de prendre tout simplement $|\lambda|^{-k}a = |\lambda|^{n-k}b$ soit $\lambda = \left(\dfrac{n!\|f\|}{\|f^{(n)}\|}\right)^{1/n}$ et on trouve directement

$$\boxed{\|f^{(k)}\| \leqslant 2\frac{(n!)^{2-k/n}}{[(n-k)!]^2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}.}$$

III.3. Par le remplacement proposé, on obtient

$$\|f^{(k)}\| \leqslant \frac{2(n!)^{2-k/n}}{[(n-k)!]^2}n^k\|f\|.$$

Si l'on veut comparer les deux majorations, il suffit de comparer leur quotient qui vaut $\dfrac{2(n!)^{2-k/n}}{[(n-k)!]^2}$. À l'aide de Stirling on a

$$\begin{aligned}
\frac{2(n!)^{2-k/n}}{[(n-k)!]^2} &\sim \frac{2(\sqrt{2\pi n})^{2-k/n}(n/e)^{2n-k}}{2\pi(n-k)[(n-k)/e]^{2n-2k}} \\
&\sim \frac{2n^{2n-k}}{(\sqrt{2\pi}^{k/n}e^k n^{k/n}(n-k)^{2n-2k}} \text{ car } n-k \sim n \\
&\sim \frac{2(n-k)^{2k}}{e^k n^k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{-2n} \text{ car } \sqrt{2\pi}^{k/n} \text{ et } n^{k/n} \sim 1 \\
&\sim 2(en)^k \text{ car } \left(1-\frac{k}{n}\right)^{-2n} \sim e^{2k}
\end{aligned}$$

Conclusion : ce n'est pas génial mais ça fait avancer le SCHMILBLICK et ça fait faire quelques calculs. Si on y réfléchit bien, on n'est pas surpris du résultat final car au lieu de prendre f dans $\mathcal{T}_{n_0}$, on a élargi l'ensemble à quelque chose de beaucoup plus grand !
Remarque : il y a un peu moins bourrin que les calculs ci-dessus, sachant que $(n!)^{-1/n} \sim \dfrac{e}{n}$ (il n'est pas nécessaire d'avoir Stirling ici) et en utilisant l'équivalence

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(\ldots)(n-k+1) \sim n^k$$

(on multiplie k termes tous équivalents à n, k fixé) alors

$$\begin{aligned}
\frac{2(n!)^{2-k/n}}{[(n-k)!]^2} &= 2(n!)^{-k/n}\left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 \\
&\sim 2(en)^k
\end{aligned}$$