SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

Vu les commentaires des jurys des concours, on demande dans ce premier devoir de faire

- un effort de présentation :
  - écrire lisiblement,
  - mettre en évidence les résultats (les souligner ou les encadrer, les dégager),
- un effort de rédaction :
  - bien justifier les théorèmes utilisés,
  - bien structurer les arguments (revenir à la ligne pour chacun d'entre eux),
- et aussi un effort de concision.

Dans tout le problème, on note $\|f\|$ la borne supérieure de la valeur absolue de toute fonction f à valeurs réelles définie et bornée sur $\mathbb{R}$. La dérivée k-ième de f, si elle existe, est notée $f^{(k)}$, et on convient que $f^{(0)}$ est f elle même.

Partie I

Pour tout entier n strictement positif, on note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et dont les valeurs pour tout x réel sont données par

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

où les a_j et les b_j sont des réels.

I.1. Montrer que, si $f \in \mathcal{T}_n$ et s'il existe un réel α et $2n+1$ réels distincts x appartenant à $[\alpha, \alpha+2\pi[$ et tels que $f(x) = 0$, alors f est la fonction nulle.

I.2. Soient a et b deux réels et s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = a\sin(nx + b)$. Montrer que $\|s'\| = n\|s\|$.

I.3. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{T}_n$ et un réel u pour lequel $g'(u) = \|g'\|$, avec $g'(u) > n\|g\|$, et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{n}\|g'\| \sin[n(x-u)] - g(x).$$

a. Montrer que h change exactement $2n$ fois de signe sur l'intervalle $[u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$.
b. Calculer $h'(u)$ et montrer que h' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi]$.
c. Calculer $h''(u)$ et montrer que h'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi[$. En déduire une expression explicite de g.
d. Les hypothèses faites sur g sont-elles compatibles entre elles ?

I.4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{T}_n$ et tout entier $k \geqslant 0$, établir l'inégalité

$$\|f^{(k)}\| \leqslant n^k \|f\|.$$

Si k et n sont fixés, existe-t-il des fonctions pour lesquelles l'égalité est atteinte ?

Partie II

Pour tout entier n strictement positif, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynômes d'une variable réelle, à coefficient réels, et de degré *au plus* égal à n. Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, on pose

$$N(P) = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|$$

et on note $N'(P)$ la plus grande des valeurs absolues des coefficients de P.

II.1. Soit C la fonction définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $C(x) = \cos[n(\operatorname{Arccos} x)]$.

a. Montrer que C coïncide sur $[-1,1]$ avec une fonction de $\mathcal{P}_n$, qu'on notera aussi C, et calculer $N(C)$.

b. Établir l'inégalité $|\sin nt| \leqslant n|\sin t|$ pour tout t réel. En déduire l'inégalité $N(C') \leqslant n^2$ puis la valeur de $N(C')$.

II.2. On note $x_1, \dots, x_n$ les racines de C, rangées dans l'ordre *décroissant.*

a. Calculer $|C'(x_i)|$ en fonction de x_i pour $i = 1, \dots, n$.

b. Vérifier que, pour tout $x \in [x_n, x_1]$, on a $n\sqrt{1-x^2} \geqslant 1$.

II.3. Soit $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$; on pose $\quad M(Q) = \sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} (|Q(x)|\sqrt{1-x^2})$.

a. Montrer que, pour tout x réel n'annulant pas C, on a

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i) \frac{C(x)}{(x-x_i)C'(x_i)}.$$

b. Déduire de ce qui précède l'inégalité $\quad N(Q) \leqslant nM(Q)$.

II.4. Soient P un polynôme appartenant à $\mathcal{P}_n$ et k un entier appartenant à $[0, n]$.

a. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\quad |P'(x)| \leqslant nN(P)(1-x^2)^{-1/2}$ (on pourra utiliser la fonction $t \mapsto P(\cos t)$).

b. Établir l'inégalité $\quad N(P^{(k)}) \leqslant \left[\dfrac{n!}{(n-k)!}\right]^2 N(P)$.

c. Vérifier l'équivalence des deux normes N et N' sur $\mathcal{P}_n$. En fait, on demande de trouver deux réels $0 < a < b$ tels que $\forall P \in \mathcal{P}_n,\ aN(P) \leqslant N'(P) \leqslant bN(P)$.

Partie III

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et n fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée n-ième.

III.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme $P_x \in \mathcal{P}_{n-1}$ par $P_x(y) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x)\dfrac{y^k}{k!}$.

a. Majorer $N(P_x)$ à l'aide de $\|f\|$ et de $\|f^{(n)}\|$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \in]0, n[$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ en établissant la majoration

$$\|f^{(k)}\| \leqslant \left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 \left(\|f\| + \frac{\|f^{(n)}\|}{n!}\right).$$

III.2. On applique le résultat de la question précédente en remplaçant f par la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(\lambda x)$, où λ est un réel fixé. Par un choix convenable de λ, établir l'inégalité $\|f^{(k)}\| \leqslant 2\dfrac{(n!)^{2-k/n}}{[(n-k)!]^2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}$ pour $k \in [1, n-1]$.

III.3. Si $f \in \mathcal{T}_{n_0}$ pour un entier n_0 alors on sait que $f \in \mathcal{T}_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. En utilisant le résultat du **I.4** appliqué à $f^{(n)}$ (soit $\|f^{(n)}\| \leqslant n^n\|f\|$), écrire la nouvelle majoration obtenue pour $\|f^{(k)}\|$.

Cette dernière majoration est valable pour tout entier $n \geqslant n_0$, comparer alors, quand $n \to +\infty$ cette majoration à celle obtenue directement en I.4 en donnant un équivalent simple de leur quotient. On pourra, à cet effet, utiliser la formule de Stirling

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$$

ou plus simplement la formule $(n!)^{1/n} \sim \dfrac{n}{e}$.