Corrigé de la deuxième épreuve de mathématiques MP 2009
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Question préliminaire

(1) Montrons par récurrence sur n que toute sous-famille à n éléments de $(\phi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est libre.
Si $n=1$ c'est immédiat.
On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons-là à l'ordre $n+1$:
si $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\mu_i\phi_{\lambda_i}=0$ alors, en simplifiant par x^{λ_j} où $\lambda_j=\min(\lambda_i)$ et en prenant la valeur en 0, on obtient $\mu_j=0$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence, la famille $(\phi_{\lambda_i})_{i\neq j}$ est libre donc les μ_i sont tous nuls ce qui permet de conclure la récurrence.
Conclusion : comme toute sous-famille finie de la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est une famille libre, cette famille est libre dans $C([0,1])$.

A. Déterminants de Cauchy.

(2) On suppose $R(X)$ est de la forme $R(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{X+b_k}$.
On multiplie la dernière colonne C_n par A_n et on lui ajoute la combinaison linéaire des autres colonnes $\sum\limits_{i=1}^{n-1}A_kC_k$. On obtient :

$$A_nD_n=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots & R(a_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & 0\\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n)\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$A_nD_n=R(a_n)D_{n-1}$$

(3) S'il existe $(k_1,k_2)\in[[1,n]]$ tel que $k_1\neq k_2$ et $a_{k_1}=a_{k_2}$ ou $b_{k_1}=b_{k_2}$ alors $D_n=0$, et alors

$$D_n=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(a_i+b_j)}\text{ en supposant } a_i+b_j\neq 0...$$

Supposons maintenant que les termes de la suite $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont deux à deux distincts ainsi pour la suite $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Par récurrence montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $D_n=\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(a_i+b_j)}$.

Pour $n=1$ on a $D_1=\dfrac{1}{a_1+b_1}$.

Soit $n\geqslant 2$, supposons que $D_{n-1}=\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1\\ 1\leqslant j\leqslant n-1}}(a_i+b_j)}$.

On a d'après la question précédente

$$A_nD_n=R(a_n)D_{n-1}$$

On a $R(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{X+b_k}$ donc

$$A_n=((X+b_n)R(X))_{x=-b_n}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n+b_k)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k+b_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}$$

et $R(a_n)=\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}$ donc puisque $A_n\neq 0$

$$D_n=\frac{R(a_n)}{A_n}D_{n-1}=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(a_i+b_j)}$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace vectoriel normé

(4) Soit

$$\mathrm{d}(x,A)=0\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \ \exists a\in A\ ,\|x-a\|<\varepsilon\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\Longleftrightarrow x \text{ est adhérent à } A.$$

(5) Supposons que $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de parties de E telle que $A=\bigcup\limits_{n\geqslant 0}A_n$.
Soit $x\in E$.
Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=\mathrm{d}(x,A_n)$ et $\beta=\mathrm{d}(x,A)$. çç Puisque $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante et $A=\bigcup\limits_{n\geqslant 0}A_n$, alors $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante minorée par β, donc la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel α, on a $\beta\leqslant\alpha$.
Soit $\varepsilon>0$, il existe $y\in A$ tel que $\beta\leqslant\|y-x\|<\beta+\varepsilon$. $y\in A$ donc il existe $n_o\in\mathbb{N}$ tel que $y\in A_{n_0}$ et alors $\alpha_{n_0}\leqslant\|y-x\|<\beta+\varepsilon$ donc $\alpha<\beta+\varepsilon$.
On fait tendre ε vers 0, on a $\alpha\leqslant\beta$.
Enfin $\mathrm{d}(x,A)=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{d}(x,A_n)$.

(6) On a la partie B est un fermé de E et $B\subset\bar{B}(0,2\|x\|)$ donc B est bornée.
Ainsi $B\cap V$ fermée bornée de V qui est de dimension finie, donc $B\cap V$ est compacte.
Soit $x\in E$, on a $B\cap V\subset V$ donc $\mathrm{d}(x,V)\leqslant\mathrm{d}(x,B\cap V)$.
Soit $y\in V$,
si $y\in B$ alors $y\in B\cap V$ et donc $\mathrm{d}(x,B\cap V)\leqslant\mathrm{d}(x,y)$.
si $y\notin B$ alors $\|y-x\|>\|x\|=\|x-0\|\geqslant\mathrm{d}(x,B\cap V)$ car $0\in B\cap V$
donc pout tout $y\in V$, $\mathrm{d}(x,B\cap V)\leqslant\mathrm{d}(x,y)$, donc $\mathrm{d}(x,B\cap V)\leqslant\mathrm{d}(x,V)$.
Ainsi $\mathrm{d}(x,B\cap V)=\mathrm{d}(x,V)$.

(7) On a l'application $\begin{array}{ccc}B\cap V&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ y&\longmapsto&\|y-x\|\end{array}$ est continue sur le compact $B\cap V$, donc bornée et atteint sa borne inférieure sur $B\cap V$, alors il existe $y\in B\cap V$ tel que $\mathrm{d}(x,B\cap V)=\|x-y\|$.
D'après la question **6)** $\mathrm{d}(x,V)=\mathrm{d}(x,B\cap V)$ donc $\mathrm{d}(x,V)=\|x-y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien.

(8) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et π la projection orthogonale sur V (elle existe car V est de dimension finie donc il admet un supplémentaire orthogonal)
Soit $x\in E$, , on a pour tout $v\in V$, $\|x-v\|^2=\|x-\pi(x)\|^2+\|\pi(x)-v\|^2$ car $x-\pi(x)\in V^\perp$ et $\pi(x)-v\in V$.
donc pour tout $v\in V$ $\|x-\pi(x)\|^2\leqslant\|x-v\|^2$ et alors $\|x-\pi(x)\|\leqslant\mathrm{d}(x,V)$
Comme $\pi(x)\in V$ alors $\mathrm{d}(x,V)=\|x-\pi(x)\|$.

Supposons qu'il existe $y \in V$ tel que $\mathrm{d}(x,V) = \|x-y\|$, alors $\| x-\pi(x) \| = \|x-y\|$
On a $\| x-y \|^2 = \| x-\pi(x) \|^2 + \| y-\pi(x) \|^2$ car $x-\pi(x) \in V^{\perp}$ et $y-\pi(x) \in V$.
donc $\| y-\pi(x) \|^2 = 0$ et alors $y = \pi(x)$.
D'où l'unicité.

(9) Soient $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ et V un sous espace vectoriel de E de dimension n contenant $Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de V et $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, ..., x_n)$. la matrice du système de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
On a $M(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tM.M$.
En effet, posons pour tout $j \in [[1,n]]$, $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, on a $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Posons ${}^tM.M = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = (x_i \mid x_j)$.
Donc $rg(M(x_1, x_2, ..., x_n)) = rg({}^tM.M) = rg(M) = rg(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Ainsi $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée.

(10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre.
Soit $x \in E$.
On a

$$G(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \begin{vmatrix} & & & (x_1 \mid x) \\ & M(x_1, x_2, ..., x_n) & & \vdots \\ & & & (x_n \mid x) \\ (x \mid x_1) & \cdots & (x \mid x_n & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

Soit π le projecteur orthogonal sur V.
$\forall i \in [[1,n]]$, $(x_i \mid x) = (x_i \mid \pi(x)) + (x_i \mid x-\pi(x)) = (x_i \mid \pi(x))$ car $x-\pi(x) \in V^{\perp}$.
$\|x\|^2 = \|x-\pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2$, donc

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, ..., x_n, x) &= \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & M(x_1, x_2, ..., x_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ (\pi(x) \mid x_1) & \cdots & (\pi(x) \mid x_n & \|x-\pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} & & & (x_1 \mid \pi(x)) \\ & M(x_1, x_2, ..., x_n) & & \vdots \\ & & & (x_n \mid \pi(x)) \\ (\pi(x) \mid x_1) & \cdots & (\pi(x) \mid x_n & \|\pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \|x-\pi(x)\|^2 \, G(x_1, x_2, ..., x_n) + G(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x)) \end{aligned}$$

On a d'après 9) $rg(M(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x))) = rg(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x))$
Donc $G(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x)) = 0$ car $\pi(x) \in V = Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Ainsi

$$G(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \|x-\pi(x)\|^2 \, G(x_1, x_2, ..., x_n).$$

D'autre part $\mathrm{d}(x,V) = \|x-\pi(x)\|$ et $G(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ car la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, donc

$$\mathrm{d}(x,V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, ..., x_n, x)}{G(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

(11) Soit $f \in C([0,1])$, on a

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = N_\infty(f).$$

Soit A une partie de $C([0,1])$ et $f \in \overline{A}^{\infty}$ alors il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$.

Comme $0 \leqslant N_2(f_n - f) \leqslant N_\infty(f_n - f)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(f_n - f) = 0$ et donc $f \in \overline{A}^{2}$.

Ainsi $\overline{A}^{\infty} \subset \overline{A}^{2}$.

(12) ϕ_0 désigne la fonction constante 1.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de $C([0,1])$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ \ f_n(x) = \begin{cases} n.x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in V_0$.

$$(N_2(f_n - \phi_0))^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - 1|^2\, dx = \frac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\phi_0 \in \overline{V_0}^{2}$.

(13) Soit $g \in C([0,1])$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $f \in V_0$ et $g = f + g(0)\phi_0$.
On a $\phi_0 \in \overline{V_0}^{2}$ donc il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de V_0 telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(g(0)\varphi_n - g(0)\phi_0) = |g(0)| \lim\limits_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g_n = f + g(0)\varphi_n$, on a $g_n \in V_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(g_n - g) = 0$.

Donc $g \in \overline{V_0}^{2}$ et alors V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

On a $\phi_0 \notin \overline{V_0}^{\infty}$, en effet , sinon il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de V_0 qui converge uniformément vers ϕ_0. En particulier $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers ϕ_0 sur $[0,1]$ et donc $\phi_0(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ ce qui est absurde.
Donc V_0 n'est pas dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

(14) Supposons que V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.

On a $V \subset \overline{V}$ donc $\overline{V} \neq \varnothing$.

Soient x et y deux éléments de $\overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe deux suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y.
On a la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de V converge vers $x + \lambda y$.

Donc $x + \lambda y \in \overline{V}$ et alors $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

(15) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞ alors il est clair que pour tout $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty} = C([0,1])$.

Réciproquement supposons que pour tout $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$ et soit $f \in C([0,1])$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définie sur $[0,1]$ telle que

$$N_\infty(P - f) \leqslant \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overset{-\infty}{V}$ et $\overset{-\infty}{V}$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overset{-\infty}{V}$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overset{-\infty}{V}$ pour la norme N_∞ qui est égal à $\overset{-\infty}{V}$.
Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

(16) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 alors il est clair que pour tout $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V} = C([0,1])$.
Réciproquement supposons que pour tout $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V}$ et soit $f \in C([0,1])$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définies sur $[0,1]$ telle que

$$N_\infty(P-f) \leqslant \varepsilon$$

D'après la question 11) on alors

$$N_2(P-f) \leqslant \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V}$ et $\overset{-2}{V}$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overset{-2}{V}$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overset{-2}{V}$ pour la norme N_2 qui est égal à $\overset{-2}{V}$.
Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

(17) On a la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $C([0,1])$ et $W = \underset{n\geqslant 0}{\cup} W_n$ donc d'après la question 5) pour tout entier $\mu \geqslant 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = \mathrm{d}(\phi_\mu, W)$.
Supposons que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et soit ϕ_μ telle que μ entier positif, on a d'après la question 4) $\mathrm{d}(\phi_\mu, W) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geqslant 0$ alors $\mathrm{d}(\phi_\mu, W) = 0$ pour tout entier $\mu \geqslant 0$ et donc d'après la question 4) pour tout entier $\mu \geqslant 0$, $\phi_\mu \in \overset{-2}{W}$ l'adhérence de W pour la norme N_2 et alors d'après la question 16) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

(18) On a d'après les questions 1) et 10)

$$\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n})}$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$, on a $(\phi_\alpha \mid \phi_\beta) = \int_0^1 x^\alpha . x^\beta dx = \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}$
Posons $\forall k \in [[0,n]]$ $\beta_k = \lambda_k + 1$ et $\beta = \mu + 1$.
On a $\forall k \in [[0,n]]$ $\lambda_k + \beta_k \neq 0$ et $\mu + \beta \neq 0$.
On a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_1} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta} \\ \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta} \\ \dfrac{1}{\mu+\beta_0} & \dfrac{1}{\mu+\beta_1} & & \dfrac{1}{\mu+\beta_n} & \dfrac{1}{\mu+\beta} \end{vmatrix}$$

D'après la partie **A)** on a

$$G(\phi_{\lambda_0},\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_n},\phi_\mu)=\frac{\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}(\lambda_i+\beta_j)}\times\frac{\prod\limits_{0\leqslant i\leqslant n}(\mu-\lambda_i)(\beta-\beta_i)}{(\mu+\beta)\prod\limits_{0\leqslant i\leqslant n}(\mu+\beta_i)\prod\limits_{0\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i+\beta)}$$

De même on a

$$G(\phi_{\lambda_0},\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_n})=\frac{\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}(\lambda_i+\beta_j)}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n)^2 &= \frac{\prod\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(\mu-\lambda_k)(\beta-\beta_k)}{(\mu+\beta)\prod\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(\mu+\beta_k)\prod\limits_{0\leqslant i\leqslant n}(\lambda_k+\beta)}\\ &= \frac{\prod\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(\mu-\lambda_k)^2}{(2\mu+1)\prod\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(\lambda_k+\mu+1)\prod\limits_{0\leqslant i\leqslant n}(\lambda_k+\mu+1)}\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n)=\frac{1}{\sqrt{2\mu+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}$$

(19) Soit $\mu\geqslant 0$. Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors il est clair que la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

Réciproquement, supposons que pour tout $\mu\geqslant 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1
Soit $\mu>0$.
Considérons la fonction $h(x)=\dfrac{\mu-x}{x+\mu+1}$ pour tout $x\in[0,\mu]$.
On a h est dérivable sur $[0,\mu]$ et pour tout $x\in[0,\mu]$ $h'(x)=-\dfrac{1+2u}{(x+\mu+1)^2}\leqslant 0$.
Donc $\forall x\in[0,\mu]$, $0\leqslant h(x)\leqslant\dfrac{\mu}{\mu+1}=h(0)$.
Soit $\alpha=\dfrac{2\mu+1}{2(\mu+1)}$, on a $\alpha\in\left]\dfrac{\mu}{\mu+1},1\right[$.
La suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 donc il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geqslant k_0$ on ait

$$h(\lambda_k)=\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}>\frac{2\mu+1}{2(\mu+1)}\quad.$$

donc $\forall k\geqslant k_0$, $\lambda_k>\mu$.
Ainsi la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

(20) D'après la question 17) l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n)=0$ pour tout entier $\mu\geqslant 0$.
Donc il suffit de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n)=0$ pour tout entier $\mu\geqslant 0\Longleftrightarrow$ la série $\sum\limits_k\dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
On a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels >0 deux à deux distincts.
Supposons pour tout entier $\mu\geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n)=0$ alors en particulier pour $\mu=0$ on a

$\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda_k}{\lambda_k+1}=0,$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda_k}\right)=+\infty$.
D'autre part on sait que : $\forall x\in\mathbb{R}^+\quad \ln(1+x)\leqslant x$.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda_k}\right)\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k}$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k}=+\infty$.
Ainsi la série $\sum\limits_k\dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

Réciproquement supposons la série $\sum\limits_k\dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente et soit μ un entier positif .
La suite $(\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, donc converge , soit $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n)$.
On a $\alpha=0$.
Car sinon $\alpha>0$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n)}{\mathrm{d}(\phi_\mu,W_{n-1})}=1.$$

D'après la question 19) on a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, donc il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geqslant k_0\ \lambda_k>\mu$.
Posons $\forall k\geqslant 0$, $u_k=\ln\left(1-\dfrac{\mu}{\lambda_k}\right)-\ln\left(1+\dfrac{\mu+1}{\lambda_k}\right)$.
On a $u_k=-\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}+\underset{k\longmapsto+\infty}{\circ}\left(\dfrac{1}{\lambda_k}\right)$ donc $u_k\underset{k\longmapsto+\infty}{\sim}-\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$.
Comme la série $\sum\limits_k-\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$ diverge et à termes de signe constant, alors la série $\sum\limits_k u_k$ diverge et vaut $-\infty$.
D'autre part, en posant $A=\sum\limits_{k=0}^{k_0-1}\ln\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)$ on a

$$\ln(\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n))=-\frac{1}{2}\ln(2\mu+1)+A+\sum_{k=k_0}^{n}u_k.$$

et alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\mathrm{d}(\phi_\mu,W_n))=-\infty$, donc $\alpha=0$ ce qui est absurde.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

(21) Supposons que W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞ alors d'après la question 11) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et donc d'après la question 20) on a la série $\sum\limits_k\dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

(22) Soit $\psi=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k.\phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. On suppose que $\lambda_k\geqslant 1$ pour tout $k\in\{0,1,...,n\}$, et soit $\mu\geqslant 1$,on a :

$$\begin{aligned}N_\infty(\phi_\mu-\psi)&=\sup_{x\in[0,1]}\left|x^\mu-\sum_{k=0}^{n}a_k.x^{\lambda_k}\right|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\mu\int_0^x t^{\mu-1}\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n}a_k.\lambda_k\int_0^x t^{\lambda_k-1}\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_0^1\left|\mu t^{\mu-1}-\sum_{k=0}^{n}a_k.\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz on a

$$N_\infty(\phi_\mu-\psi)\leqslant\left(\int_0^1\left|\mu t^{\mu-1}-\sum_{k=0}^{n}a_k.\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=N_2\left(\mu\phi_{\mu-1}-\sum_{k=0}^{n}a_k.\lambda_k\phi_{\lambda_k-1}\right)$$

(23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i): & \lambda_0 = 0 \\ (ii): & \lambda_k \geqslant 1 \text{ pour tout } k \geqslant 1. \end{cases}$$

et que la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

On pose $\forall k \geqslant 1$, $\lambda'_k = \lambda_k - 1$, on a $(\lambda'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels $\geqslant 0$ deux à deux distincts.

On a $\forall k \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{\lambda_k} \leqslant \dfrac{1}{\lambda'_k}$ donc la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda'_k}$ est divergente.

Posons W' le sous espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda'_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a d'après la question 20) W' est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

Soit μ un entier $\geqslant 1$, on a $\mu.\phi_{\mu-1} \in C([0,1])$ et soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in W'$ tel que $N_2(\mu.\phi_{\mu-1} - g) \leqslant \varepsilon$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que $g = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda'_k}$.

On a d'après la question 22) $N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leqslant N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_{\lambda'_k}\right) \leqslant \varepsilon$ où $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{\lambda_k}\phi_{\lambda_k}$.

Il est clair que $\psi \in W_n \subset W$.

Ainsi pour tout entier $\mu \geqslant 1$ on a $\phi_\mu \in \overline{W}^{\infty}$.

On a $\lambda_0 = 0$, donc $\phi_0 \in W \subset \overline{W}^{\infty}$.

D'après la question 16) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

(24) Si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii\ '): \quad \inf_{k\geqslant 1} \lambda_k > 0$$

Posons $\alpha = \inf\limits_{k\geqslant 1} \lambda_k > 0$ alors pour tout $k \geqslant 1$, on a $\lambda_k \geqslant \alpha$ et alors $\dfrac{\lambda_k}{\alpha} \geqslant 1$, $\dfrac{\lambda_0}{\alpha} = 0$ et la série $\sum_k \dfrac{\alpha}{\lambda_k}$ diverge

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = \dfrac{\lambda_k}{\alpha}$ et $V = Vect(\phi_{\beta_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on a d'après la question 23), V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

Soit $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$, on a la fonction $g : x \longmapsto f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ est un élément de $C([0,1])$, donc il existe $h \in V$ tel que

$$N_\infty(h - g) \leqslant \varepsilon$$

$h \in V$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(a'_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que $h = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\phi_{\beta_k}$.

On a en faisant le changement de variable $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$

$$N_\infty(h-g) = \sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^{\beta_k} - f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| = \sup_{y\in[0,1]}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k y^{\lambda_k} - f(y)\right| = N_\infty(P - f\ )$$

Où $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\phi_{\lambda_k} \in W$

donc

$$N_\infty(P - f\ ) \leqslant \varepsilon$$

Ainsi W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.