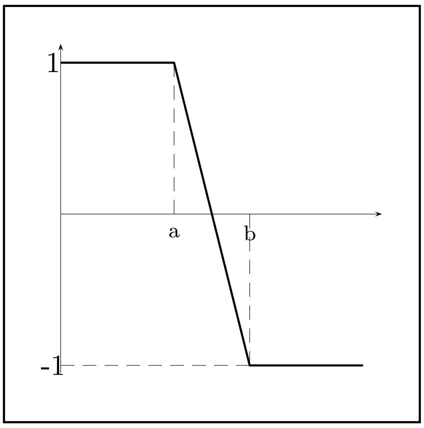
SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE

Première partie

I.1.
- m est une forme linéaire : immédiat.
- $|m(f)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|$ d'où m est continue et $\|m\| \leqslant 1$.
- $m(1) = 1$ et en conclusion : $\|m\| = 1$.

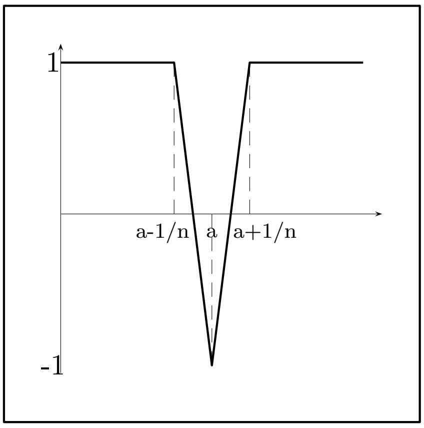
I.2.
- δ est une forme linéaire : immédiat.
- $|\delta(f)| = |f(a)| \leqslant \|f\|$ d'où δ est continue et $\|\delta\| \leqslant 1$.
- $\delta(1) = 1$ et en conclusion : $\|\delta\| = 1$.
- $\delta_a(f) - \delta_b(f) = f(a) - f(b)$ donc $|\delta_a(f) - \delta_b(f)| \leqslant |f(a)| + |f(b)| \leqslant 2\|f\|$ donc $\|\delta_a - \delta_b\| \leqslant 2$.



Supposons $a < b$ et considérons f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant a \\ -1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$, f affine sur $[a, b]$ alors $\|f\| = 1$ et $|\delta_a(f) - \delta_b(f)| = 2$.

Conclusion : $\|\delta_a - \delta_b\| = 2$.

I.3. $|m(f) - \delta_a(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(a)\right| \leqslant 2\|f\|$ donc $\|m - \delta_a\| \leqslant 2$.



Soit f_n affine par morceaux, définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant a - 1/n \\ -1 & \text{si } x = a \\ 1 & \text{si } x = a + 1/n \end{cases}$ pour n assez grand et $a \in]0, 1[$. $\|f\| = 1$ et $m(f_n) = 1 - \dfrac{2}{n}$, $\delta_a(f_n) = -1$.

On en déduit que $|m(f_n) - \delta_a(f_n)| = 2 - \dfrac{2}{n} \to 2$ quand $n \to +\infty$ donc $\|m - \delta_a\| = 2$.

Si $a = 0$ ou $a = 1$, on aura $m(f_n) = 1 - \dfrac{1}{n}$, $\delta_a(f_n) = -1$ et la conclusion persiste.

I.4.
- $\delta_{1/n}(f) = f(1/n) \to f(0) = \delta_0(f)$ par continuité de f.
- Si $\delta_{1/n} \to \mu$ dans $M(I)$ alors $\delta_{1/n}(f) \to \mu(f)$ donc $\mu(f) = f(0) = \delta_0(f)$ soit $\mu = \delta_0$. Or $\|\delta_0 - \delta_{1/n}\| = 2$ ce qui est contradictoire avec $\|\delta_0 - \delta_1/n\| \to 0$ donc la suite $(\delta_{1/n})$ n'a pas de limite dans $M(I)$.

- Soit $\delta_{1/n,1/n}(F) = F(1/n,1/n) \to F(0,0) = \delta_{0,0}(F)$. Par le même genre d'arguments, on prouve que la suite $(\delta_{1/n,1/n})$ n'a pas de limite dans $M(I^2)$.

I.5.
- $p_\theta(\lambda)$ et $q_\theta(\lambda)$ sont évidemment linéaires.
- $|(f \otimes \theta)(x,y)| = |f(x)\theta(y)| \leqslant \|f\|.\|\theta\|$.
  Or $|p_\theta(\lambda)(f)| = |\lambda(f \otimes \theta)| \leqslant \|\lambda\|.\|f \otimes \theta\| \leqslant \|\lambda\|.\|\theta\|.\|f\|$ donc $p_\theta(\lambda) \in M(I)$ et $\|p_\theta(\lambda)\| \leqslant |\|\lambda\|.\|\theta\|$.
  De même, on obtient $\|q_\theta(\lambda)\| \leqslant \|\lambda\|.\|\theta\|$.
- Grâce aux inégalités que l'on vient de démontrer, on en déduit la continuité de p_θ et q_θ ainsi que les inégalités : $\|p_\theta\| \leqslant \|\theta\|$ et $\|q_\theta\| \leqslant \|\theta\|$.

Deuxième partie

II.1.
- $F \in \mathcal{C}(I^2)$ et I^2 étant compact, on en déduit l'uniforme continuité de F :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall ((x,y),(x',y')) \in I^2 \times I^2,\ \|(x,y)-(x',y')\| \leqslant \eta \Rightarrow |F(x,y) - F(x',y')| \leqslant \varepsilon.$$

  On en déduit que, pour tout $y \in I$, $|x - x'| \leqslant \eta \Rightarrow |F(x,y) - F(x',y)| \leqslant \varepsilon$ ce qui peut encore s'écrire $\|F(x,.) - F(x',.)\| \leqslant \varepsilon$.
  On obtient alors $|F_\nu(x) - F_{\nu(x')}| = |\nu(F(x,.) - F(x',.))| \leqslant \|\nu\|.\varepsilon$ ce qui entraîne la continuité de F_ν.
- On a ensuite $\|F(x,.)\| = \sup\limits_{y \in I} |F(x,y)| \leqslant \|F\|$ et, par continuité de ν,

$$|F_\nu(x)| = |\nu(F(x,.)| \leqslant \|\nu\|.\|F(x,.)\| \leqslant \|\nu\|.\|F\|.$$

  Conclusion : $\|F_\nu\| = \sup\limits_{x \in I} |F_\nu(x)| \leqslant \|\nu\|.\|F\|$.

II.2. **a.**
- $\mu \otimes \nu$ est bien une forme linéaire.
- $|(\mu \otimes \nu)(F)| = |\mu(F_\nu)| \leqslant \|\mu\|.\|F_\nu\| \leqslant \|\mu\|.\|\nu\|.\|F\|$ ce qui prouve la continuité de $\mu \otimes \nu$ ainsi que l'inégalité $\|\mu \otimes \nu\| \leqslant \|\mu\|.\|\nu\|$.

b. On a déjà $\|\mu \otimes \nu\| \leqslant \|\mu\|.\|\nu\|$.
Soit $F = f \otimes g$ alors $F_\nu(x) = \nu(f(x).g) = g(x)\nu(g)$ d'où $\mu(F_\nu) = \mu(f)\nu(g)$.
Comme $|F(x,y)| = |f(x)|.|g(y)|$ alors

$$\begin{aligned}\|F\| &= \sup_{(x,y) \in I^2} |f(x)|.|g(y)| = \sup_{x \in I} |f(x)| \times \sup_{y \in I} |g(y)| \\ &= \|f\|.\|g\|.\end{aligned}$$

On suppose μ et ν non nulles. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $(f_n) \in \mathcal{C}(I)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(f_n) = \|\mu\|$. De même, il existe $(g_n) \in \mathcal{C}(I)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|g_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \nu(g_n) = \|\nu\|$.
On en déduit que

$$(\mu \otimes \nu)(f_n \otimes g_n) = \mu(f_n)\nu(g_n) \to \|\mu\|.\|\nu\|.$$

Or $\|f_n \otimes g_n\| = 1$ donc $\|\mu \otimes \nu\| \geqslant (\mu \otimes \nu)(f_n \otimes g_n)$ et par conséquent $\|\mu \otimes \nu\| \geqslant \|\mu\|.\|\nu\|$.
Conclusion : en combinant les deux inégalités, on obtient $\|\mu \otimes \nu\| = \|\mu\|.\|\nu\|$.

c. $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ est bilinéaire continue de $M(I)^2$ dans $M(I^2)$.

II.3. **a.**
- On a vu à la question précédente que $(\mu \otimes \nu)(f \otimes g) = \mu(f)\nu(g)$.
  Si $\lambda \in \mathcal{E}$ alors $\lambda = \mu \otimes \nu$ par définition et $\lambda \neq 0$ entraîne que $\mu \neq 0$ et $\nu \neq 0$. Il existe donc $(f,g) \in \mathcal{C}(I)^2$ tel que $\mu(f) \neq 0$ et $\nu(g) \neq 0$. $\mu(f)\nu(g) \neq 0$, il suffit alors de normaliser pour avoir α et β (i.e. prendre par exemple $\alpha = f$ et $\beta = \dfrac{g}{\mu(f)\nu(g)}$).

- Montrer que $\lambda = p_\beta(\lambda) \otimes q_\alpha(\lambda)$ n'est alors qu'un problème de notation.

$$\begin{aligned}
p_\beta(\lambda)\otimes q_\alpha(\lambda)(F) &= p_\beta(\lambda)(F_{q_\alpha(\lambda)}) = \lambda(F_{q_\alpha(\lambda)}(x,.)\otimes\beta)\\
&= (\mu\otimes\nu)(F_{q_\alpha(\lambda)}(x,.)\otimes\beta) = \mu(F_{q_\alpha(\lambda)}(x,.))\nu(\beta)\\
&= \mu(\alpha)\mu[\nu(F(x,.))]\nu(\beta)\\
\text{car } F_{q_\alpha(\lambda)}(x,.) &= q_\alpha(\lambda)(F(x,.)) = \lambda(\alpha\otimes F(x,.)) = (\mu\otimes\nu)(\alpha\otimes F(x,.))\\
&= \mu(\alpha)\nu(F(x,.)) \text{ d'où}\\
p_\beta(\lambda)\otimes q_\alpha(\lambda)(F) &= \mu\otimes\nu(F) = \lambda(F)
\end{aligned}$$

car $\mu(\alpha)\nu(\beta) = 1$.
Conclusion : comme cette relation est vraie pour tout $F \in \mathcal{C}(I^2)$, on en déduit que $\lambda = p_\beta(\lambda) \otimes q_\alpha(\lambda)$.

b. $p_\theta(\lambda)(f) = \lambda(f\otimes\theta) = (\delta_0\otimes\delta_0 + \delta_1\otimes\delta_1)(f\otimes\theta) = f(1)$.
De même $q_\theta(\lambda)(f) = f(1)$.

c. Si $\lambda \in \mathcal{E}$ alors, comme $\lambda(\theta\otimes\theta) = 1$ on a

$$\begin{aligned}
\lambda(f\otimes g) &= (p_\beta(\lambda)\otimes q_\alpha(\lambda)(f\otimes g) = f(1)g(1)\\
&= (\delta_1\otimes\delta_1)(f\otimes g).
\end{aligned}$$

Si on prend $f = g = 1$ alors on arrive au résultat suivant : $\lambda(f\otimes g) = 1$ et $p_\beta(\lambda)\otimes q_\alpha(\lambda)(f\otimes g) = 2$ ce qui est contradictoire.
Conclusion : $\lambda \notin \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ n'étant pas stable par addition n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

Troisième partie

III.1. • On sait que $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ désigne la longueur de la courbe $y = f(x)$ entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ donc a_n est la longueur de la courbe $y = \varphi(nx)$ entre les points $(0, \varphi(0))$ et $(1, \varphi(n))$.

• $\displaystyle\frac{a_n}{n} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{n^2} + \varphi'(nx)^2}\,\mathrm{d}x$. On effectue le changement de variable $u = nx$ dans cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n} &= \frac{1}{n}\int_0^n \sqrt{\frac{1}{n^2}+\varphi'(u)^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\varphi'(u)^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{n^2}+\varphi'(u)^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

car $u \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{n^2}+\varphi'(u)^2}$ est 1-périodique.

On utilise alors l'encadrement $|a| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a|+|b|$ avec $a = \varphi'(u)$ et $b = \dfrac{1}{n}$ d'où

$$\int_0^1 |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{1}{n} + \int_0^1 |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Conclusion : la suite $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$ converge et sa limite l vaut $\displaystyle\int_0^1 |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$.

III.2. • v et v_n sont évidemment des formes linéaires.
$|v(g)| \leqslant \int_0^1 |g[\varphi(x)]|.|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|g\| \int_0^1 |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x$ et, de même on a $|v_n(g)| \leqslant \|g\|\dfrac{a_n}{n}$ d'où la continuité de v et v_n.

• En posant $u = nx$ on peut réécrire v_n :

$$v_n(g) = \int_0^1 g[\varphi(u)]\sqrt{\frac{1}{n^2} + \varphi'(u)^2}\,\mathrm{d}u$$

d'où

$$\begin{aligned}|v_n(g) - v(g)| &\leqslant \int_0^1 |g[\varphi(u)]|\Big[\underbrace{\sqrt{1/n^2 + \varphi'(u)^2} - |\varphi'(u)|}_{\leqslant 1/n}\Big]\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{1}{n}\|g\|\end{aligned}$$

soit $|(v_n - v)(g)| \leqslant \dfrac{\|g\|}{n}$ i.e. $\|v_n - v\| \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$ dans $M(I)$.

III.3. • On transforme l'expression $\omega_{n,k}(F) = \displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} F(x, \varphi(nx))\sqrt{1 + n^2\varphi'(nx)^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = nx - k$ d'où

$$\omega_{n,k} = \int_0^1 F(k/n + t/n, \varphi(t))\sqrt{1/n^2 + \varphi'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

et on note $\Delta_{n,k} = \omega_{n,k} - \nu[F(k/n, .)]$.

• F est continue sur le compact $[0,1]^2$ donc F est bornée par M et F est uniformément continue :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \forall t \in [0,1],\ |F(k/n + t/n, \varphi(t)) - F(k/n, \varphi(t))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1 + \|\varphi'\|)}.$$

• On majore alors $|\Delta_{n,k}|$ en introduisant un terme intermédiaire :

$$\begin{aligned}|\Delta_{n,k}| \leqslant \int_0^1 |\underbrace{F(k/n + t/n, \varphi(t))}_{\leqslant M}|\Big(\underbrace{\sqrt{1/n^2 + \varphi'(t)^2} - |\varphi'(t)|}_{\leqslant 1/n}\Big)\,\mathrm{d}t \\ + \int_0^1 |\underbrace{F(k/n + t/n, \varphi(t)) - F(k/n, \varphi(t))}_{\leqslant \varepsilon/[2(1+\|\varphi'\|)}|.\underbrace{|\varphi'(t)|}_{\leqslant\|\varphi'\|}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

• On choisit alors $N \geqslant N_1$ tel que $\dfrac{M}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geqslant N$ d'où $|\Delta_n| \leqslant \varepsilon$.

III.4. λ_n est une forme linéaire, de plus $|\lambda_n(F)| \leqslant \|F\|\dfrac{a_n}{n}$ donc elle est continue.

On écrit ensuite que $\lambda_n(F) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_{n,k}(F)$ (notation de la question précédente) d'où

$$\left|\lambda_n(F) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\nu\left[F(k/n, .)\right]\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}|\Delta_{n,k}| \leqslant \varepsilon \text{ pour } n \geqslant N$$

donc $\lim_{n\to+\infty}[\lambda_n(F)-\lambda'_n(F)]=0$ en posant $\lambda'_n(F)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\nu(F(k/n,.))$.
Cherchons la limite de $\lambda'_n(F)$: par linéarité,

$$\begin{aligned}\lambda'_n(F)=\nu\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}F(k/n,.)\right)&=\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}F(k/n,\varphi(x))\right]|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}F_\nu\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1F_\nu(t)\,\mathrm{d}t \text{ car on a une somme de Riemann}\\&=m(F_\nu)=(m\otimes\nu)(F).\end{aligned}$$

Conclusion : d'une part $\lim_{n\to+\infty}[\lambda_n(F)-\lambda'_n(F)]=0$, d'autre part, $\lim_{n\to+\infty}\lambda'_n(F)=(m\otimes\nu)(F)$ d'où $\lambda(F)=m\otimes\nu(F)$, $\lambda=m\otimes\nu\in\mathcal{E}$.

Quatrième partie

IV.1. Supposons, par exemple, que $\varphi'\geqslant 0$.
Soit F une primitive de f alors $(F\circ\varphi)'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$ donc

$$\nu(f)=F(\varphi(1))-F(\varphi(0))=\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)}f(x)\,\mathrm{d}x$$

et on pose $0\leqslant\varphi(0)=a_1\leqslant\varphi(1)=a_2\leqslant 1$. Le cas $\varphi'\leqslant 0$ est similaire.

IV.2. Soient $x_0=0<x_1<\ldots<x_{p-1}<x_p=1$ les racines de l'équation $\varphi'(x)=0$. Sur chaque intervalle $]x_k,x_{k+1}[$, φ' garde un signe constant.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{p-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{p-1}\nu_k(f)\end{aligned}$$

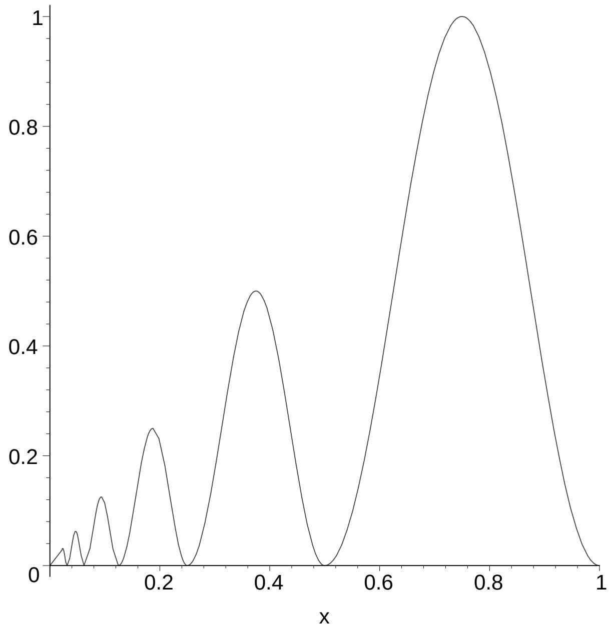
où $\nu_k(f)=\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(\varphi_k(x))|\varphi'_k(x)|\,\mathrm{d}x$ en prolongeant $\varphi_{|[x_k,x_{k+1}]}$ à $[0,1]$ par des constantes à gauche et à droite.
À la question précédente, on a vu que $\nu_k(f)=\displaystyle\int_0^1 1_{I_k}(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ où $I_k=[\varphi_k(0),\varphi_k(1)]$ si $\varphi_k(0)\leqslant\varphi_k(1)$, sinon, on intervertit ces deux valeurs.
Conclusion : $\nu(f)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\int_0^1 1_{I_k}(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\psi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $\psi=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}1_{I_k}$ fonction en escalier prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

IV.3. **a.** Avec le code Maple suivant

```
>phi:=x->piecewise(1/2<x and x<1,(sin(2*Pi*x))^2,x<=0,0,x>=1,0);
>plot(sum(phi(2^k*x)/2^k,k=0..5),x=0..1);
```

On obtient la courbe de la figure 1

b.
- φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ car c'est une somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Les α_k sont positifs ($(\alpha_k)\searrow 0$) donc $\varphi_n\geqslant 0$. $\varphi_0(2^kx)$ s'annule sur le complémentaire de $]\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}[$ donc
  - $\varphi_n(x)=\dfrac{\alpha_k}{2^k}\varphi_0(2^kx)$ si $x\in]\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}[$,
  - $\varphi_n(x)=0$ si x appartient au complémentaire de $]0,1[$,



On a tracé plus de courbes que ne le demandait l'énoncé mais on voit bien que les différentes courbes ne se chevauchent pas et que plus on somme de termes et plus on se rapproche de l'origine.

FIGURE 1

on en déduit que φ_n prend ses valeurs dans I.

- Le **IV.2** s'applique à φ_n (on remplace I par $[\frac{1}{2^{n+1}}, 1]$) donc
$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \int_0^1 f[\varphi_n(x)]|\varphi_n'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Sur chaque intervalle $I_k = [\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$, on a $\varphi_n(x) = \dfrac{\alpha_k}{2^k}\psi_k(x)$ par conséquent $\varphi_n(x)\begin{cases}\geqslant 0 & \text{sur } [\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{3}{2^{k+2}}]\\ \leqslant 0 & \text{sur } [\frac{3}{2^{k+2}}, \frac{1}{2^k}]\end{cases}$. On décompose alors l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f[\varphi_n(x)]|\varphi_n'(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^n \int_{1/2^{k+1}}^{1/2^k} f[\varphi_n(x)]|\varphi_n'(x)|\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^n \int_{1/2^{k+1}}^{3/2^{k+2}} f[\varphi_n(x)]\varphi_n'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{3/2^{k+2}}^{1/2^k} f[\varphi_n(x)]\varphi_n'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^n F[\varphi_n(3/2^{k+2})] - F[\varphi_n(1/2^{k+1})] - F[\varphi_n(1/2^k)] + F[\varphi_n(3/2^{k+2})]\end{aligned}$$

où F est une primitive de f

$$= \sum_{k=0}^n 2F(\alpha_k/2^k) - 2F(0) = \sum_{k=0}^n \int_0^{\alpha_k/2^k} 2f(x)\,\mathrm{d}x$$

car $\varphi_n(3/2^{k+2}) = \dfrac{\alpha_k}{2^k}\varphi_0(3/4) = \dfrac{\alpha_k}{2^k}$ et donc

$$\int_0^1 f[\varphi_n(x)]|\varphi_n'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\psi_n(x) = 2\sum\limits_{k=0}^n 1_{[0,\alpha_k/2^k]}$.

- On en déduit immédiatement $\gamma_n = 2\sum\limits_{k=0}^n \dfrac{\alpha_k}{2^k}$.

c.

- La suite (φ_n) converge uniformément sur I car c'est la somme partielle d'une série normalement convergente de fonctions continues.
- Montrons que φ (limite de la suite (φ_n)) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
  - Si $x > 0$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_k = [1/2^{k+1}, 1/2^k]$ et, pour $n \geqslant k$, $\varphi_n(x) = \dfrac{\alpha_k}{2^k}\varphi_0(2^k x)$. À la limite, on obtient $\varphi(x) = \dfrac{\alpha_k}{2^k}\varphi_0(2^k x)$ donc φ est dérivable en x et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_k.
  - Si $x = 0$, on a toujours $\varphi_n(0) = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. De plus, si $0 < y < 1/2^k$ alors il existe $h \geqslant k$ tel que $y \in I_h$ et $\varphi'(y) = \alpha_h \varphi_0'(2^h y)$ d'où $|\varphi'(y)| \leqslant \alpha_h \|\varphi_0'\| \leqslant \alpha_k \|\varphi_0'\|$. Comme la suite (α_k) tend vers 0, on en déduit que $\lim\limits_{y \to 0} \varphi'(y) = 0$ ce qui permet d'affirmer que φ' est continue et dérivable en 0.

  Conclusion : φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
- On a vu à la question précédente que $\gamma_n = 2\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha_k}{2^k}$ donc γ_n est la somme partielle d'une série convergente : $\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_n = \gamma = 2\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{2^k}$.

d.

- Pour $x > 0$, on pose $\psi(x) = 2\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 1_{[0,\alpha_k/2^k]}(x)$ qui est bien définie car $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x > \dfrac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}$ donc $\psi(x) = 2\sum\limits_{k=0}^{n} 1_{[0,\alpha_k/2^k]}(x) = \psi_n(x)$ est une somme finie.
- Pour $\dfrac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}} < \varepsilon \leqslant \dfrac{\alpha_n}{2^n}$ on a ainsi

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^1 2\sum_{k=0}^{n} 1_{[0,\alpha_k/2^k]}(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{\alpha_{n+1}/2^{n+1}}^1 2\sum_{k=0}^{n} 1_{[0,\alpha_k/2^k]}(x)\,\mathrm{d}x = \gamma_n \leqslant 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{2^k}.\end{aligned}$$

  $\varepsilon \mapsto \displaystyle\int_\varepsilon^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$ est une fonction décroissante et majorée donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\displaystyle\int_\varepsilon^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\gamma = 2\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{2^k}$.
-
  - Posons $\nu_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f[\varphi_n(x)]|\varphi_n'(x)|\,\mathrm{d}x$. On sait que φ_n est nulle sur $[0, \frac{1}{2^{n+1}}]$ donc

$$\nu_n(f) = \int_{1/2^{n+1}}^1 f[\varphi_n(x)]|\varphi_n'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{1/2^{n+1}}^1 f[\varphi(x)]|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

    car $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ sur $[\frac{1}{2^{n+1}}, 1]$.
    On déduit de ce résultat que $\lim\limits_{n \to +\infty} \nu_n(f) = \nu(f)$.
  - On sait aussi que $\nu_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2^{n+1}}^1 f(x)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$.
  - Sur $[\frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}, 1]$, $\psi(x) = \psi_n(x)$ donc $\displaystyle\int_{1/2^{n+1}}^1 f(x)[\psi(x) - \psi_n(x)]\,\mathrm{d}x = 0$.

    Or, de même que $\displaystyle\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$ existe, $\displaystyle\int_0^1 \psi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ existe par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty}\displaystyle\int_{1/2^{n+1}}^1 f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

– En rassemblant les résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned}\nu(f) - \int_0^1 \psi(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \nu(f) - \nu_n(f) + \int_{1/2^{n+1}}^1 f(x)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \psi(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \nu(f) - \nu_n(f) - \int_0^{1/2^{n+1}} f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \to 0\end{aligned}$$

donc $\nu(f) = \displaystyle\int_0^1 \psi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.