SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

Préambule

On désigne par E l'espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ formé par les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui sont *périodiques de période* 2π.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in E$ est l'élément $e_n(x) = e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$. À f et g dans E, on associe le nombre complexe :

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

et on note $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$. On admettra que $(.|.)$ est un produit scalaire qui fait de E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.
On désigne par $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
On admettra que E muni de cette norme est *complet.*
Pour $N \in \mathbb{N}$, E_N est l'espace vectoriel engendré par les e_n pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [-N, N]$. On note D_N l'élément de E_N défini par $D_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} e_n$ et on pourra utiliser le fait que, pour $x \in]0, 2\pi[$,

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathbb{F}_m$ l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, on dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est *sommable* si

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} |a_{-n}| \text{ convergent}$$

et on posera $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$.

Dans tout le problème, N désignera un entier supérieur ou égal à 1 qui pourra varier.

Partie I

À $f \in E$, on associe la suite de ses coefficients de Fourier $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$f_n = (e_n|f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

I.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille telle que les sommes $\sum_{n=-N}^{N} |u_n|$ soient bornées, on désigne par S_N l'élément de E : $S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e_n$. Montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers un élément u de E pour la norme $\|.\|_\infty$.
Quels sont les coefficients de Fourier de u ?

I.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $u_n = 0$ pour $n \leqslant 0$, $u_1 = -1$ et $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.
Montrer que l'élément u de E obtenu par le procédé de la question I.2 n'est pas dérivable en $x = 0$ (on pourra écrire, pour $N \geqslant 2$ arbitraire et $x \neq 0$,

$$\operatorname{Im} \frac{u(x) - u(0)}{x} = \operatorname{Im} \frac{S_N(x) - S_N(0)}{x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)x}$$

$\operatorname{Im} z$ désignant la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ et conclure en prenant $x = \dfrac{1}{N}$).

I.3. On désigne par Σ_N l'élément de E défini par : $\Sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{e_n}{n}$.
Montrer que la suite $(\Sigma_N)_{N\geqslant 1}$ est de Cauchy dans E pour la norme $\|.\|_2$.

I.4. Montrer que, si la suite $(\Sigma_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers $\sigma \in E$ pour la norme $\|.\|_2$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = (e^{ix} - 1)\sigma(x)$$

où u a été définie en **I.2**.

I.5. Déduire des questions **I.2** et **I.4** que E muni de la norme $\|.\|_2$ n'est pas complet.

Partie II

On notera $P_N f$ la projection de $f \in E$ sur E_N.

II.1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\,\mathrm{d}y$$

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y)\,\mathrm{d}y$$

II.2. On désigne par α_N la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\|P_N f\|_\infty$ lorsque f décrit la boule unité de $(E, \|.\|_\infty)$.
Montrer que $\alpha_N \leqslant \sqrt{2N+1}$.

II.3. Soit L_N le nombre $L_N = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,\mathrm{d}x$, et, pour $\varepsilon > 0$, $\psi_N^\varepsilon \in E$ défini par :

$$\psi_N^\varepsilon(x) = \frac{D_N(x)}{\sqrt{\varepsilon + D_N^2(x)}},\ x \in \mathbb{R}$$

Montrer, en utilisant les ψ_N^ε que $\alpha_N \geqslant L_N$ (on pourra montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon + y^2}} = \frac{\varepsilon |y|}{\sqrt{\varepsilon + y^2}(\sqrt{\varepsilon + y^2} + |y|)} \leqslant \sqrt{\varepsilon}).$$

II.4. Montrer que, lorsque N tend vers l'infini, L_N est équivalent à $\dfrac{4}{\pi^2}\ln N$.

II.5. Que pouvez-vous en conclure concernant l'application linéaire P_n ?

Partie III

On désigne par H_1 le sous-espace de E formé par les éléments f tels que $(1+n^2)|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable.

On note alors, pour $f \in H_1$, $\|f\|_1 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n|^2\right)^{1/2}$.

III.1. Montrer que, si $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $f \in H_1$ et $\|f\|_1^2 = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2$.
Réciproquement, si $f \in H_1$, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

III.2. Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur H_1 et que H_1, muni de cette norme, est complet.

III.3. Montrer que $E_1 = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap E$ est dense dans H_1 pour la norme $\|.\|_1$.

III.4. Soit $f \in H_1$, montrer que :

$$\|P_N f - f\|_2 \leqslant \frac{1}{N+1}\|f\|_1.$$

III.5. En écrivant, pour $g \in E_1$, x et y dans $\mathbb{R}$,

$$g^2(x) - g^2(y) = 2\int_y^x g(t)g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

montrer qu'il existe $K_1 > 0$ telle que, pour tout $f \in H_1$, $\|f\|_\infty \leqslant K_1\|f\|_2^{\frac{1}{2}}\|f\|_1^{\frac{1}{2}}$.

III.6. En déduire que, pour tout $f \in H_1$ et $N \geqslant 1$,

$$\|P_N f - f\|_\infty \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{N+1}}\|f\|_1$$

et expliquer brièvement l'intérêt de cette inégalité en terme d'approximation de fonctions et justifier l'introduction de l'espace H_1.

Partie IV

IV.1. Montrer que, si $f \in H_1$, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1$.

IV.2. Montrer qu'il existe une constante K_2 telle que, pour tout $f \in H_1$, $\|f\|_\infty \leqslant K_2\|f\|_1$.

IV.3. Soit $(g^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H_1 telle que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|g^p\|_1 \leqslant 1$.

a. Montrer qu'il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite des produits scalaires $((g^{\psi(p)}|e_n))_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente. On note alors ℓ_n la limite de cette suite.

b. Montrer que la suite de fonctions S_N, où $S_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} \ell_n e_n$ converge vers une fonction $\ell \in E$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

c. Montrer que $\ell \in H_1$.

d. Montrer, par un exemple, qu'en général $\|g^{\psi(p)} - \ell\|_1$ ne tend pas vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Partie V

On désigne par x_j le point $\dfrac{2\pi}{2N+1}j$ pour $j \in \mathbb{Z}$. On observe que, pour tout $f \in E$, $f(x_j)$ ne dépend que du reste de la division de j par $2N+1$, ce qui permet de parler de $f(x_j)$ pour $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$.

V.1. Montrer que la matrice carrée d'ordre $2N+1$: $(e^{ilx_j})_{\substack{0\leqslant l\leqslant 2N\\ 0\leqslant j\leqslant 2N}}$ a pour inverse la matrice

$$\left(\frac{1}{2N+1}e^{-ilx_j}\right)_{\substack{0\leqslant l\leqslant 2N\\ 0\leqslant j\leqslant 2N}}$$

V.2. **a.** Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément de E_N (noté $C_N f$) tel que :

$$\forall j \in \mathbb{F}_{2N+1},\ (C_N f)(x_j) = f(x_j).$$

b. Montrer que C_N est une application linéaire de E dans E_N.

c. Montrer que $C_N \neq P_N$ (on pourra remarquer que $C_N e_{2N+1} = e_0$).

V.3. On désigne par $\mathcal{E}_{2N+1}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_{2N+1}$ dans $\mathbb{C}$, on note $(z_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ ces applications.

a. À $z \in \mathcal{E}_{2N+1}$, on associe l'application $\widehat{z} : k \mapsto \widehat{z_k}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\widehat{z_l} = \frac{1}{2N+1}\sum_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}} e^{-ilx_k} z_k.$$

Montrer que $\widehat{z}_l$ ne dépend que du reste de la division de l par $2N+1$. Ceci nous permet de considérer $\widehat{z}$ comme un élément de $\mathcal{E}_{2N+1}$.

b. On dit alors que $\widehat{z}$ est la transformée de Fourier discrète (T.F.D.) de z. On note $\varphi = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ la T.F.D. de l'application $j \mapsto f(x_j)$. Montrer que :

$$C_N f = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\check{k}} e_k$$

où $\check{k}$ est le reste de la division de k par $2N+1$.

V.4. Soit $h \in E_{2N}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j).$$

V.5. a. Pour f et g dans E, on note :

$$[f,g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j\in\mathbb{F}_{2N+1}} \overline{f(x_j)}g(x_j).$$

Montrer que, si f et g sont dans E_N, $[f,g] = (f|g)$.

b. Montrer que, pour tout f, g dans E,

$$[f - C_N f, g] = 0$$

c. Calculer $[e_n, e_m]$.

V.6. Soit $f \in H_1$ et $l \in \mathbb{Z}$. Montrer que les sommes $\sum\limits_{k=-K}^{K} |f_{l+(2N+1)k}|$ sont bornées et que :

$$C_N(f) = \sum_{l=-N}^{N} C_{N,l}(f) e_l$$

où

$$C_{N,l}(f) = \lim_{K\to+\infty}\sum_{k=-K}^{K} f_{l+(2N+1)k}.$$

V.7. a. Montrer que, pour tout $f \in E$, on a :

$$f - C_N f = g_N - C_N g_N \text{ avec } g_N = f - P_N f.$$

b. Montrer qu'il existe une constante $K_3 \in]0,+\infty[$ telle que, pour tout $f \in H_1$,

$$\|f - C_N f\|_2 \leqslant \frac{K_3}{N+1}\|f\|_1.$$

V.8. Pour quelle raison pratique préfére-t-on C_N à P_N ?