ÉCOLE POLYTECHNIQUE M' 1996 DEUXIÈME ÉPREUVE

Sous algèbres commutatives nilpotentes de $\mathcal{L}(E,E)$

Première partie $\boxed{9}$

1. *Un endomorphisme nilpotent*

a) $\operatorname{Ker} T$ est au plus de dimension 1, sinon T serait nul, et au moins de dimension 1, sinon T serait inversible, donc non nilpotent. Donc

$$\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Im} T) = 1 \qquad \boxed{2}$$

b) Montrons d'abord que $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$. $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$ n'est pas réduit à zéro, sinon les images itérées d'un élément pris hors du noyau seraient toutes non nulles. N'étant pas réduite à zéro, l'intersection ne peut être que de dimension 1, donc égale à $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$. On prend pour premier vecteur de base un vecteur v quelconque hors du noyau. Son image $w = T(v)$ est dans le noyau, on la prend comme second vecteur de base (v et w sont bien indépendants). Il est alors clair que $r = 2$. .... $\boxed{3}$

2. *Une algèbre nilpotente*

On sait déjà, d'après I.1.b, que tous les éléments non nuls de $\mathcal{A}$ sont 2-nilpotents. Soient U et V deux éléments de $\mathcal{A}$, comme l'algèbre est commutative, on peut appliquer la formule du binôme, $(U+V)^2 = U^2 + V^2 + 2UV$, mais U^2, V^2 et $(U+V)^2$ sont nuls, donc $UV = 0$. *L'algèbre est 2-nilpotente* .... $\boxed{2}$

Choisissons un élément T non nul de $\mathcal{A}$ et prenons pour T une base du type étudié en I.1.b Dans cette base, un autre élément U de $\mathcal{A}$ aura une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En écrivant que $TU = UT = 0$ (car $\mathcal{A}$ est 2-nilpotente) on constate que seul c peut être non nul. .... $\boxed{2}$

Deuxième partie $\boxed{5}$

3. *Décomposition de E en somme directe*

On prend $T_{i,j} = P_i \circ T \circ P_j$, on vérifie alors que

$$\begin{aligned} T(x)_i = P_i \circ T(x) &= P_i \circ T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{P_i \circ T \circ P_j}_{=T_{i,j}}(x) \end{aligned} \qquad \boxed{2}$$

4. *Produit par blocs*

$$\begin{aligned} (ST)_{i,j} &= P_i \circ ST \circ P_j \\ &= P_i \circ S \circ (\sum_k P_k) \circ (\sum_l P_l) \circ T \circ P_j \\ &= \sum_k \sum_l P_i \circ S \circ P_k \circ P_l \circ T \circ P_j \\ &= \sum_k (P_i \circ S \circ P_k) \circ (P_k \circ T \circ P_j) \quad = \quad \sum_k S_{i,k} T_{k,j} \end{aligned} \qquad \boxed{3}$$

en effet $\sum_k P_k = Id$ et $(k \neq l) \Rightarrow (P_k \circ P_l = 0)$

Troisième partie $\boxed{20}$

5. Si $E_3 = E$ on a à la fois $\operatorname{Ker} T \supset E$ et $\operatorname{Im} T \supset E$, c'est à dire $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T = E$, ce qui est incompatible avec $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim E$. .... $\boxed{2}$
Si $E_3 = 0$ on vérifie par récurrence que si $x \notin \operatorname{Ker} T$, toutes les images itérées de x sont non nulles, donc T n'est pas nilpotent. .... $\boxed{3}$

6. *2-nilpotence*
On vérifie facilement que $E_3 = \operatorname{Im} T$ ssi $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} T$ ssi $T^2 = 0$ ssi $r = 2$ ($r = 1$ est exclu car $T \neq 0$). .... $\boxed{3}$

7. *Représentation triangulaire par blocs*
E_1 est un supplémentaire de $\operatorname{Im} T$ dans E, donc les images des vecteurs de base ont des projections nulles sur E_1 ; la première ligne de la matrice par blocs est donc nulle. E_3 est inclus dans le noyau, donc tous les vecteurs de E_3 ont des images nulles ; la dernière colonne de la matrice par blocs est donc nulle. .... $\boxed{3}$

8. *Réduction triangulaire à diagonale nulle*

T^k est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ? & T_{2,2}^k & 0 \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix}$ donc pour $k \geqslant r$, $T_{2,2}^k = 0$.

Comme on l'a déjà remarqué, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent est λ^n, donc n'importe quelle base de "triangularisation" de T répond à la question. Cette démonstration, conforme au programme, n'utilise rien de ce qui précède. Si on tient à utiliser les questions précédentes, on peut raisonner comme suit :

Raisonnons par récurrence sur n.
Pour $n = 1$ le problème est sans intérêt et pour $n = 2$ il a été résolu à la première partie. Supposons le résultat démontré dans K^d pour tout $d < n$. Soit $T \neq 0$ nilpotent dans K^n.

- Si T est 2-nilpotent, on a vu en **Q8** que $E_3 = \operatorname{Im} T$, donc on peut faire une décomposition analogue à celle de **Q7**, avec E_2 réduit à $\{0\}$, donc de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$ qui répond à la question.
- Si T est r-nilpotent, avec $r > 2$, la décomposition faite en **Q7** ramène au même problème pour $T_{2,2}$, dans E_2 qui est de dimension strictement inférieure à n : on applique l'hypothèse de récurrence. .... $\boxed{5}$

9. *Ordre de nilpotence et dimension*
En **Q8** on a représenté T par une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle. On constate alors que T^k est représenté par une matrice dont les $k-1$ premières sous-diagonales sont nulles, T^n est donc représenté par la matrice nulle : $r \leqslant n$. .... $\boxed{2}$

10. *Exemple numérique*
Il suffit de changer l'ordre des vecteurs de base: en les écrivant dans l'ordre e_1, e_3, e_4, e_2 on obtient pour T une réduction de Jordan $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. .... $\boxed{2}$

Quatrième partie $\boxed{44}$

11. r étant l'ordre de nilpotence, c'est à dire *le plus petit entier* tel que le produit de r éléments quelconques de $\mathcal{A}$ soit nul, il existe $r-1$ éléments de $\mathcal{A}$, $T_1 \dots T_{r-1}$ dont le produit P n'est pas nul. Le noyau de P est donc *strictement* inclus dans E. Ce noyau contient $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ car pour tout T de $\mathcal{A}$ il contient $\operatorname{Im} T$ (en effet $P \circ T = 0$ comme produit de r éléments de $\mathcal{A}$). $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ est donc distinct de E. .... $\boxed{4}$

E_3 est inclus dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, il est donc distinct de E. Comme en **Q5**, si $E_3 = \{0\}$ les images d'un élément non nul de $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ par n'importe quel élément de $\mathcal{A}$ seraient non nulles et dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, donc par récurrence les images itérées seraient toutes non nulles, donc $\mathcal{A}$ ne serait pas nilpotente. .... $\boxed{3}$

12. *2-nilpotence*

On a

$$\begin{aligned} E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \forall T \in \mathcal{A},\ \operatorname{Im} T \subset \mathcal{K}(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow \forall (T,U) \in \mathcal{A}^2,\ \operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} U \\ &\Leftrightarrow \forall (T,U) \in \mathcal{A}^2,\ U \circ T = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 2 \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

13. *Généralisation de la question 8*

a) $\mathcal{A}_{2,2}$ est une sous-algèbre commutative nilpotente d'ordre $r' \leqslant r$, cela découle trivialement des formules de produit de matrices par blocs (voir **Q4**). .... $\boxed{2}$

Soit $T \in \mathcal{A}$, on a les équivalences suivantes :

$$T_{2,2} = 0 \Leftrightarrow T(\mathcal{I}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ T(A) \subset \operatorname{Ker} B$$

donc $T_{2,2} = 0 \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ ATB = 0$.

Conclusion : $\mathcal{A}_{2,2} = 0 \Leftrightarrow r = 3$. .... $\boxed{4}$

b) On utilise exactement la même technique de récurrence qu'en **Q8** ; *la démonstration directe signalée pour* ***Q8*** *ne se généralise pas.* .... $\boxed{3}$

c) Comme en **Q8**, on constate que dans la base construite ci-dessus, tous les produits de k éléments de $\mathcal{A}$ sont représentés par des matrices triangulaires inférieures ayant leur diagonale et $k-1$ sous-diagonales nulles. On en déduit que $r \leqslant n$. .... $\boxed{2}$

14. On a vu que si $T \in \mathcal{A}$ alors

$$T_{2,2} = 0 \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ ATB = 0. \tag{E}$$

Soient $T_1, T_2, \dots, T_{r-2}$ $r-2$ éléments de $\mathcal{A}$, on sait que $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $AT_1 \dots T_{r-2}B = 0$ ce qui donne $(T_1T_2 \dots T_{r-2})_{2,2} = 0$ d'où $(T_1)_{2,2}(T_2)_{2,2} \dots (T_{r-2})_{2,2} = 0$. Le produit de $r-2$ éléments de $\mathcal{A}_{2,2}$ est nul donc $r' \leqslant r-2$. .... $\boxed{4}$

Choisissons maintenant $T_1, T_2, \dots, T_{r-1}$ éléments de $\mathcal{A}$ tels que $T_1T_2 \dots T_{r-1} \neq 0$. On a $(T_1T_2 \dots T_{r-3})_{2,2} \neq 0$ (en vertu de l'équivalence (E)) donc $(T_1)_{2,2}(T_2)_{2,2} \dots (T_{r-3})_{2,2} \neq 0$. On peut donc trouver $r-3$ éléments de $\mathcal{A}_{2,2}$ dont le produit n'est pas nul et par conséquent $r' > r-3$. .... $\boxed{4}$

Conclusion : $r' = r-2$.

15. a) Fixons $T \in \mathcal{A}$ et notons U l'élément générique de $\mathcal{A}$; comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, TU appartient à $\mathcal{A}$. TU s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,2}U_{2,1} & T_{2,2}U_{2,2} & 0 \\ T_{3,2}U_{2,1} & T_{3,2}U_{2,2} & 0 \end{pmatrix}$ Lorsque U décrit $\mathcal{A}$ $T_{2,2}U_{2,1}$ décrit $T_{2,2}(\mathcal{A}_{2,1})$ et tous ces éléments sont, par définition, dans $\mathcal{A}_{2,1}$ car TU appartient à $\mathcal{A}$. .... $\boxed{2}$

b) Suivant l'indication de l'énoncé, décomposons $E_2 = E_2' \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$. Dans le calcul de **Q15a** le terme $T_{2,2}U_{2,1}$ ne doit pas faire apparaître de composante sur E_2' donc $T_{2,2}$ doit être de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ donc T de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(T) & 0 & 0 \\ T'_{2,1} & C(T) & D(T) & 0 \\ T_{3,1} & T'_{3,2} & T''_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$

Choisissons un vecteur non nul U dans E_2' ; par définition de E_2' il appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ donc il existe un endomorphisme $T_1 \in \mathcal{A}$ et un vecteur $U' \in E$ tels que $U = T_1(U')$ et la forme de la matrice de T_1 montre que U' doit avoir une projection non nulle sur E_2' .

Notons $U' = U_1 + V_1 + W_1$, $U_1 \in E_2'$ $(U_1 \neq 0)$, $V_1 \in E_1$, $W_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$ une éventuelle composante sur E_3 peut être négligée car elle serait annulée par T_1. De même U_1 étant dans E_2' est l'image par un endomorphisme $T_2 \in \mathcal{A}$ d'un vecteur U_1' qu'on peut décomposer en

$U_1' = U_2 + V_2 + W_2$, $U_2 \in E_2'$ $(U_2 \neq 0)$, $V_2 \in E_1$, $W_2 \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$. On construit ainsi par récurrence $U_1, U_2 \dots U_r$, mais en remplaçant successivement les U_i par leur valeur on arrive à $U = T_1 \circ T_2 \cdots \circ T_r(U_r) + V + W$, $V \in E_1$, $W \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$. C'est à dire, puisque $\mathcal{A}$ est r-nilpotente, $U = V + W$ ce qui est absurde. .... $\boxed{7}$

16. a) Soit $T' \in \mathcal{A}$, on a $TT' = T'T$ donc, en effectuant le produit par blocs

$$TT' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,2}T'_{2,1} & * & * \\ T_{3,2}T'_{2,1} & * & * \end{pmatrix} = T'T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

on obtient $T_{2,2}T'_{2,1} = 0$ et $T_{3,2}T'_{2,1} = 0$ soit $\operatorname{Im} T'_{2,1} \subset \operatorname{Ker} T_{2,2}$ et $\in T'_{2,1} \subset \operatorname{Ker} T_{3,2}$.
D'après la question **15.b** les $\operatorname{Im} T'_{2,1}$ engendrent E_2 lorsque T' décrit $\mathcal{A}$.

Conclusion : $E_2 \subset \operatorname{Ker} T_{2,2} \Rightarrow T_{2,2} = 0$ et, de même, $E_2 \subset \operatorname{Ker} T_{3,2} \Rightarrow T_{3,2} = 0$. . $\boxed{6}$

b) Prenons l'algèbre engendrée par l'endomorphisme étudié en **Q10**, dans la base réordonnée, on constate que $T' = T^3$ s'exprime par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $T'_{2,1}$, $T'_{2,2}$, $T'_{3,2}$ nuls, mais $T'_{3,1}$ non nul. .... $\boxed{3}$