SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

L'objet du problème est l'étude des solutions des équations différentielles du second ordre avec conditions aux limites et quelques applications.

Question préliminaire

Soient p et q deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [0,1]$ à valeurs réelles, montrer que l'équation différentielle

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \qquad (1)$$

peut se ramener à l'équation différentielle

$$y'' = Q(t)y \qquad (2)$$

où Q est une fonction continue que l'on précisera (poser $x = yz$ et chercher une expression de z convenable).

Rechercher la fonction Q dans le cas de l'équation

$$x'' - 2\,\mathrm{th}\,t.x' - \frac{2}{\mathrm{ch}^2 t}x = 0.$$

On ne s'intéresse plus maintenant qu'à la forme (2) de l'équation différentielle.

Données du problème

- a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$ (sauf en **I.1** et au **II.1.b**).
- Q une fonction continue à valeurs réelles.
- $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
- $E_2 = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C}) \mid af(0) + bf'(0) = 0,\ cf(1) + df'(1) = 0\}$ muni du même produit scalaire.
- D l'application linéaire de E_2 dans E définie par

$$\forall g \in E_2,\ \forall x \in [0,1],\ Dg = -g'' + Qg.$$

Si $f \in E$, le *problème de Sturm-Liouville* L_f consiste à chercher les solutions $g \in E_2$ vérifiant $Dg = f$.

Première partie : étude de D

On appelle fonction propre de D toute application $g \in E_2$ non nulle telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $Dg = \lambda g$, λ est appelée valeur propre associée.

I.1. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de D dans le cas particulier où $Dg = -g'' + g$ avec les conditions aux limites $g'(0) = g'(1) = 0$ ($a = c = 0$, $b = d = 1$).

I.2. Valeurs propres et vecteurs propres de D.

a. Montrer que $\forall (f,g) \in {E_2}^2$, $(Df|g) = (f|Dg)$.

b. En déduire que les valeurs propres de D sont réelles.

c. Montrer enfin que les sous-espaces propres sont de dimension 1 et 2 à 2 orthogonaux.

I.3. L'ensemble des valeurs propres est minoré.

a. Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $A \in]0,+\infty[$ montrer que
$$\forall x \in [0,1],\ g^2(1) - g^2(x) \leqslant A\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{A}\int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$$
(utiliser l'inégalité $2\alpha\beta \leqslant \alpha^2+\beta^2$).

b. Déduire du **a** l'inégalité $g^2(1) \leqslant (A+1)\displaystyle\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{A}\int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$.

c. Montrer que, pour tout $A' \in]0,+\infty[$, on a $g^2(0) \leqslant (A'+1)\displaystyle\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{A'}\int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$.

d. Soient $(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$, montrer qu'il existe une constante M telle que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, on a
$$ug^2(1) + vg^2(0) \leqslant M\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.4. Soit λ une valeur propre de D et g une fonction propre associée.

a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où g est à valeurs réelles.

b. En calculant $(Dg - \lambda g|g)$ montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que
$$\alpha g^2(1) + \beta g^2(0) = \int_0^1 [(Q(t)-\lambda)g^2(t) + g'^2(t)]\,\mathrm{d}t.$$

c. Montrer que l'ensemble des valeurs propres est minoré et en déduire qu'il existe une constante C telle que $D + C\,\mathrm{Id}_{E_2}$ est injectif.

On suppose, dans les parties II, III, IV que D est injectif, quitte à le remplacer par $D + C\,\mathrm{Id}_{E_2}$.

Deuxième partie : opérateur intégral associé à D

II.1. Construction de la fonction de Green.

a. Montrer qu'il existe deux fonctions ψ_1 et ψ_2 linéairement indépendantes, solutions de l'équation différentielle (2), telles que
$$a\psi_1(0) + b\psi_1'(0) = 0,\ c\psi_2(1) + d\psi_2'(1) = 0,\ \psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2' = 1.$$
On appelle fonction de Green du problème aux limites, la fonction G définie par
$$G(x,t) = \begin{cases} \psi_2(x)\psi_1(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1,\\ \psi_1(x)\psi_2(t) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1.\end{cases}$$

b. Calculer la fonction de Green dans le cas de l'équation différentielle $-y'' + y = 0$ lorsque $a = c = 0$, $b = d = 1$ (l'exprimer à l'aide des fonctions ch et sh).

II.2. Continuité de la fonction de Green.

a. Soit $T = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1\}$, montrer qu'il existe $A_1 \geqslant 0$ tel que, pour tout $(X,Y) \in T^2$, $|G(X) - G(Y)| \leqslant A_1\|X-Y\|_2$ (on fera intervenir la fonction $H(v) = G((1-v)Y + vX)$).

b. Montrer que G est lipschitzienne.

II.3. Formule intégrale de l'unique solution de L_f.

Pour $f \in E$, soit Φf la fonction définie par
$$\Phi f(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que Φf est l'unique solution de L_f.

II.4. Que penser de D et Φ ?

Troisième partie : étude de Φ

III.1. Caractère hermitien de Φ.

a. Montrer que $\forall (g_1, g_2) \in E$, $(\Phi g_1 | g_2) = (g_1 | \Phi g_2)$.

b. Donner les relations entre les valeurs propres et les sous-espaces propres de D et Φ.

III.2. Montrer que Φ est une application linéaire continue de $(E, \|.\|_2)$ dans $(E_2, \|.\|_\infty)$.

III.3. Montrer de plus que l'on a

$$\forall g \in E,\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |\Phi g(x) - \Phi g(y)| \leqslant A|x-y|.\|g\|_2 \leqslant A|x-y|.\|g\|_\infty$$

où A est la constante de Lipschitz mise en évidence à la question **II.2.b**.

III.4. Compacité de l'opérateur Φ.

a. Soit (g_n) une suite bornée de $(E, \|.\|_2)$ et $k \in \mathbb{N} \mapsto r_k$ une énumération des rationnels de $[0,1]$.
Montrer qu'il existe $\varphi_k\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telles que $(\varphi_{k+1}(n))$ est une suite extraite de $(\varphi_k(n))$ et vérifiant, pour $j \leqslant k$, $\big(\Phi g_{\varphi_k(n)}(r_j)\big)$ converge.

b. En déduire l'existence d'une application $\psi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\big(\Phi g_{\psi(n)}(x)\big)$ converge pour tout x rationnel de $[0,1]$.

c. Montrer alors que la suite $\big(\Phi g_{\psi(n)}\big)$ converge uniformément.

III.5. Sous-espaces fermés stables.
Soient F un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$, fermé pour la norme $\|.\|_\infty$ et stable par Φ. On pose $M = \sup\{\|\Phi g\|_2,\ g \in F,\ \|g\|_2 = 1\}$.

a. Soit $M' = \sup\{|(g|\Phi g)|,\ g \in F,\ \|g\|_2 = 1\}$. Montrer que M et M' sont bien définies et que l'on a $M' \leqslant M$.

b. Soient f et g deux fonctions de F, montrer les deux inégalités

$$(f|\Phi f) + 2\,\mathrm{Re}[(g|\Phi f)] + (g|\Phi g) \leqslant M' \left\{\|f\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}[(g|f)] + \|g\|_2^2\right\}$$

$$(f|\Phi f) - 2\,\mathrm{Re}[(g|\Phi f)] + (g|\Phi g) \geqslant -M' \left\{\|f\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}[(g|f)] + \|g\|_2^2\right\}$$

c. En déduire que $M = M'$.

III.6. Fonctions propres.
On reprend les notations et les hypothèses de la question précédente.

a. Montrer qu'il existe (g_n) une suite de fonctions de F telle que $\|g_n\|_2 = 1$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to+\infty} (g_n|\Phi g_n) = \pm M$.

b. Montrer que l'on peut extraire une suite $(g_{\varphi(n)})$ de la suite (g_n) telle que $\big(\Phi g_{\varphi(n)}\big)$ converge uniformément vers $T \in F$. On note g_n à la place de $g_{\varphi(n)}$.

c. Montrer, en étudiant $\|\Phi g_n - M g_n\|_2^2$, que $\|T\|_2 = M$.

d. En conclure qu'il existe $S \in F$ tel que $\|S\|_2 = 1$ et $\Phi(S) = \pm MS$.

III.7. Propriétés des éléments propres de Φ.
Soit μ_0 la valeur propre mise en évidence à la question précédente avec $F = E$ ($\mu_0 = \pm M$), on sait que D_0 l'espace propre associé est de dimension 1 (cf.**I.1.c**).

a. Montrer que l'orthogonal de D_0 est stable par Φ et fermé pour $\|.\|_\infty$.

b. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que l'on peut trouver des valeurs propres μ_n pour $n \in [\![0, N]\!]$ telles que $|\mu_0| \geqslant |\mu_1| \geqslant \ldots \geqslant |\mu_N|$ où au moins une inégalité sur 2 est stricte.

c. Montrer que la suite (μ_n) tend vers 0 (utiliser le III.4).

d. Montrer que le processus décrit à la question **b** permet d'avoir toutes les valeurs propres de Φ.

e. Montrer finalement qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres négatives.

Quatrième partie : développement en série des fonctions de E_2.

On reprend les notations (*et les résultats*) de la partie précédente.
Pour chaque valeur propre μ_n on choisit une fonction propre φ_n normée pour $\|.\|_2$ (on rappelle que $\mu_n \in \mathbb{R}$).

IV.1. Montrer que l'on peut choisir φ_n à valeurs réelles.

IV.2. Soit $g \in E$, on définit $a_n(g) = (\varphi_n|g)$. Trouver une relation entre $a_n(g)$ et $a_n(\Phi g)$.

IV.3. Injectivité de $g \mapsto (a_n(g))_{n\geqslant 0}$.
Soit $F = \{g \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(g) = 0\}$.

- **a.** Montrer que F est stable par Φ et fermé pour $\|.\|_\infty$.
- **b.** Montrer par l'absurde que $F = \{0\}$.

IV.4. Inégalité de Bessel

Montrer que la série $\sum |a_n(g)|^2$ converge et que l'on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n(g)|^2 \leqslant \|g\|_2^2$.

IV.5. Théorème de Hilbert-Schmidt.

- **a.** Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$, montrer l'inégalité

$$\sum_{n=N}^{N+p} |a_n(\Phi f)\varphi_n(x)| \leqslant \left(\sum_{n=N}^{N+p} |a_n(f)|^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{n=N}^{N+p} \big(\mu_n\varphi_n(x)\big)^2\right)^{1/2}.$$

- **b.** Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $\sum\limits_{n=N}^{N+p} \big(\mu_n\varphi_n(x)\big)^2 \leqslant B^2$ (appliquer Bessel à la fonction $g_x(t) = G(x,t)$ où G est la fonction de Green).
- **c.** En déduire que la série de fonctions $\sum a_n(\Phi f)\varphi_n$ converge uniformément vers une fonction $H \in E$.
- **d.** Montrer que $H = \Phi f$.
- **e.** Montrer finalement que pour toute fonction $g \in E_2$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(g)\varphi_n(x)$ où la série converge absolument pour tout x et converge uniformément sur $[0,1]$.

IV.6. Calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu_n^2$.
On admettra ici le théorème de Dini :
si (f_n) est une suite croissante de fonctions définies sur un segment I, convergeant simplement sur I vers une fonction f continue sur I alors la convergence est uniforme sur I.

- **a.** En appliquant le **IV.5.d** à la fonction $f(t) = g_x(t) = G(x,t)$, montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu_n^2\varphi_n^2(x)$ converge uniformément vers la fonction $h(x) = \displaystyle\int_0^1 G^2(x,t)\,\mathrm{d}t$.
- **b.** En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu_n^2 = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 G^2(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

Pour la suite du devoir, on pourra choisir $\alpha \in \mathbb{R}$ n'appartenant pas au spectre de D. On appliquera les résultats des questions précédentes à $\Phi_\alpha = (D - \alpha\,\mathrm{Id})^{-1}$.
Soit (μ_n) les valeurs propres de Φ_α, (φ_n) la suite orthonormale des fonctions propres associées. On posera $\lambda_n = \alpha + \dfrac{1}{\mu_n}$ et, quitte à renuméroter les (λ_n), on supposera que la suite (λ_n) croît.

CINQUIÈME PARTIE : RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE STURM-LIOUVILLE ET APPLICATIONS

On considère le problème de Sturm-Liouville suivant :

- Soit Q une fonction réelle continue sur $[0,1]$,
- a, b, c, d des réels vérifiant $ad-bc\neq 0$,
- $f\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

on veut chercher les solutions du système suivant

$$-y''+Qy=\lambda y+f,\ ay(0)+by'(0)=0,\ cy(1)+dy'(1)=0 \qquad (L_f)$$

V.1. Montrer que si λ n'est pas égal à l'un des λ_n alors le problème de Sturm-Liouville ci-dessus admet une unique solution donnée par la formule

$$g=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}(\varphi_n|f)\varphi_n.$$

V.2. On suppose ici que $\lambda=\lambda_p$.

a. Montrer que si (L_f) admet des solutions alors $(\varphi_p|f)=0$.

b. Réciproquement :
on sait que φ_p est solution de l'équation homogène $-y''+(Q-\lambda_p)y=0$. Soit ψ_p une autre solution de cette équation linéairement indépendante de φ_p, on suppose que $\begin{vmatrix}\varphi_p & \psi_p\\ \varphi_p' & \psi_p'\end{vmatrix}=1$.
En recherchant les solutions du problème de Sturm-Liouville, montrer que la condition $(\varphi_p|f)=0$ est suffisante.

c. Montrer alors que l'ensemble des solutions s'écrit

$$g=C\varphi_p+\sum_{n\neq p}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}(\varphi_n|f)\varphi_n$$

où C décrit $\mathbb{C}$.

V.3. On suppose dans cette question que $Q=0$, $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=-1$.

a. Chercher les valeurs propres λ_n de D et les fonctions propres associées.

b. Soit $\beta\in\mathbb{R}^*$, rechercher la fonction de Green G_β associée à $D_{\beta^2}=D+\beta^2\,\mathrm{Id}$.

c. On pose $\mu_n=\dfrac{1}{\lambda_n+\beta^2}$, montrer que, pour tout $(x,t)\in[0,1]^2$,

$$G_\beta(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n\varphi_n(x)\varphi_n(t)$$

où la série est uniformément convergente sur $[0,1]^2$.

d. En déduire la formule de la trace

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n+\beta^2}=\int_0^1 G_\beta(t,t)\,\mathrm{d}t=\frac{\beta^2\operatorname{sh}\beta-\beta\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta}{2\beta^2(\beta\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta)}.$$

e. Soit $u_n\in]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$ l'unique solution de l'équation $\tan x=x$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n^2}=\frac{1}{10}$.