# SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

## Question préliminaire $\boxed{5}$

- En posant $x = yz$ on obtient l'équation différentielle

$$zy'' + (pz + 2z')y' + (qz + pz' + z'')y = 0$$

et si on impose $pz + 2z' = 0$ on obtiendra bien la relation cherchée.
Synthèse : soit $z(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t p(u)\,\mathrm{d}u\right]$ alors $z$ ne s'annule pas sur $I$ et on a équivalence entre $x$ solution de (1) et $y = \dfrac{x}{z}$ solution de (2) avec $Q = -\dfrac{qz + pz' + z''}{z}$ continue car $z' = -\dfrac{1}{2}pz$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait $Q = \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{p'}{2} - q$)................. $\boxed{3}$

- Exemple : on prend ici $z(t) = \exp\left[\int_0^t \operatorname{th} u\,\mathrm{d}u\right] = \operatorname{ch} t$ d'où
$Q = -\left(-\dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 t}\operatorname{ch} t - 2\operatorname{th} t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t\right)\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = 1$................................ $\boxed{2}$

## Première partie : étude de $D$ $\boxed{36}$

**I.1.** On veut résoudre l'équation $g'' + (\lambda - 1)g = 0$ avec les conditions $g'(0) = g'(1) = 0$. Soit $\delta$ une racine carrée de $1 - \lambda$ sur $\mathbb{C}$.

- $\delta = 0$ (i.e. $\lambda = 1$) alors $g(t) = \alpha t + \beta$, $g'(t) = \alpha$ donc $\alpha = 0$, les fonctions propres sont les fonctions constantes non nulles.............................................. $\boxed{1}$
- $\delta \neq 0$ (i.e. $\lambda \neq 1$) les solutions s'écrivent $g(t) = \alpha e^{\delta t} + \beta e^{-\delta t}$. La condition $g'(0) = 0$ entraîne que $\alpha = \beta$ puis $g'(1) = 0$ donne $e^{\delta} = e^{-\delta}$ soit $\delta = ik\pi$.
Conclusion : les valeurs propres sont les $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ et les fonctions propres associées sont les $y_n(t) = \cos(n\pi t)$............................................. $\boxed{3}$

**I.2. a.** En faisant 2 intégrations par parties successives on obtient

$$-\int_0^1 \overline{f}''(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\overline{f}'g\right]_0^1 + \left[\overline{f}g'\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{f}(t)g''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $-\left[\overline{f}'g\right]_0^1 + \left[\overline{f}g'\right]_0^1 = \begin{vmatrix}\overline{f}(1) & g(1)\\ \overline{f}'(1) & g'(1)\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\overline{f}(0) & g(0)\\ \overline{f}'(0) & g'(0)\end{vmatrix} = 0$, chacun des déterminants étant nul : par exemple $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{f(1)} & g(1)\\ \overline{f'(1)} & g'(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}* & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ permet d'affirmer que le premier déterminant est nul ($ad - bc \neq 0$). On arrive alors à la relation suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \overline{Df}(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (-\overline{f}''(t) + Q\overline{f}(t))g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \overline{f}(t)[-g''(t) + Q(t)g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \overline{f}(t)Dg(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

i.e. $(Df|g) = (f|Dg)$.................................................... $\boxed{4}$

**b.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $D$ et $f$ une fonction propre associée alors

$$(Df|f) = \overline{\lambda}(f|f) = (f|Df) = \lambda(f|f)$$

et, comme $(f|f) \neq 0$, $\lambda = \overline{\lambda}$ soit $\lambda \in \mathbb{R}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{1}$

**c.** Montrons que les sous-espaces propres sont orthogonaux : soient $\lambda$ et $\mu$ deux valeurs propres distinctes, $f$ et $g$ des fonctions propres associées alors

$$(Df|g) = \lambda(f|g) = (f|Dg) = \mu(f|g)$$

donc $(f|g) = 0$ car $\lambda \neq \mu$ et en conclusion $E_\lambda \perp E_\mu$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{1}$

Montrons que les sous-espaces propres sont de dimension 1 : $E_\lambda$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $-y'' + (Q - \lambda)y = 0$ vérifiant les conditions aux limites $ay(0) + by'(0) = 0$, $cy(1) + dy'(1) = 0$ donc $\dim E_\lambda \in \{1, 2\}$. . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{2}$

Si $\dim E_\lambda = 2$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle vérifient la condition $ay(0) + by'(0) = 0$ ce qui est impossible si on prend par exemple l'unique solution du problème de Cauchy vérifiant la condition initiale $y(0) = d$, $y'(0) = -c$. . . . . . . . . . . $\boxed{4}$

**I.3.** **a.** On sait que $g^2(1) - g^2(x) = \displaystyle\int_x^1 2g(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et, en utilisant l'inégalité suggérée, on a $2\left(\sqrt{A}g(t)\right)\left(\dfrac{g'(t)}{\sqrt{A}}\right) \leqslant Ag^2(t) + \dfrac{1}{A}g'^2(t)$ d'où

$$\forall x \in [0,1],\ g^2(1) - g^2(x) \leqslant A\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{A}\int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

en intégrant et en majorant les intégrales de $x$ à 1 des fonctions positives par leur intégrale de 0 à 1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{2}$

**b.** On a ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g^2(1) \leqslant A\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{A}\int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t + g^2(x).$$

$g$ est une fonction continue sur un segment, on choisit alors $x$ tel que $g^2(x) = \min\limits_{t\in[0,1]} g^2(t)$ donc $g^2(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$ d'où $g^2(1) \leqslant (A+1)\displaystyle\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{A}\int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$. . . . . . . $\boxed{3}$

**c.** On procède de même en partant de $g^2(0) - g^2(x)$ (ou on applique le **b** à $g(1-t)$). $\boxed{1}$

**d.** En combinant les inégalités des questions **b** et **c**, on obtient

$$ug^2(1) + vg^2(0) \leqslant [u(A+1) + v(A'+1)]\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \left[\frac{u}{A} + \frac{v}{A'}\right]\int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

et, en prenant par exemple $A = A' = u + v + 1 \neq 0$, on arrive à l'inégalité demandée

$$ug^2(1) + vg^2(0) \leqslant M\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

en prenant $M = (u+v)(u+v+2)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{2}$

**I.4.** **a.** Soit $g_1 = \mathrm{Re}(g)$ et $g_2 = \mathrm{Im}(g)$, $g_1$ et $g_2$ ne peuvent être des fonctions simultanément nulles et $Dg_i = \lambda g_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ donc on peut se ramener au cas où $g$ est à valeurs réelles. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{2}$

**b.** On calcule donc

$$0 = (Dg - \lambda g|g) = \int_0^1 (Q(t) - \lambda)g^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 g''(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

or $-\displaystyle\int_0^1 g''(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -g'(1)g(1) + g'(0)g(0) + \int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{1}$

Si $d \neq 0$ on a $g'(1) = -\dfrac{c}{d}g(1)$ et si $d = 0$, $g(1) = 0$ donc on a $-g'(1)g(1) = \beta g^2(1)$ (avec par exemple $\beta = 1$ si $g(1) = 0$). On fait de même avec $g'(0)$ d'où

$$\alpha g^2(1) + \beta g^2(0) = \int_0^1 [(Q(t) - \lambda)g^2(t) + g'^2(t)]\,\mathrm{d}t. \qquad \boxed{3}$$

**c.** On utilise maintenant le **I.3** avec $u = |\alpha|$, $v = |\beta|$. Soit $g$ une fonction propre et $\lambda$ la valeur propre associée.

$$M\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g'^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant ug^2(1) + vg^2(0) \geqslant \int_0^1 [(Q(t) - \lambda)g^2(t) + g'^2(t)]\,\mathrm{d}t$$

ce qui entraîne $\lambda \displaystyle\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 (Q(t) - M)g^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (\inf Q(t) - M)\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

$\lambda \geqslant \inf Q(t) - M$ et par conséquent l'ensemble des valeurs propres est minoré. . . . $\boxed{5}$

Conclusion : $D + C\,\mathrm{Id}_{E_2}$ est injectif avec $C = M + 1 - \inf Q(t)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{1}$

## Deuxième partie : opérateur intégral associé à $D$ $\boxed{25}$

**II.1. a.** Soit $\psi_1$ la solution de (2) satisfaisant les conditions initiales $\psi_1(0) = \lambda b$, $\psi_1'(0) = -\lambda a$, $\lambda \neq 0$ et $\psi_2$ celle satisfaisant les conditions initiales $\psi_2(1) = \mu d$, $\psi_2'(1) = -\mu c$, $\mu \neq 0$, $(\psi_1, \psi_2)$ sont linéairement indépendantes sinon il existerait une solution à l'équation $D\varphi = 0$ et $D$ est injective. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{3}$

On ajuste alors les constantes $\lambda$ et $\mu$ pour que $W(\psi_1, \psi_2) = 1$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{1}$

**b.** Après calculs on trouve $\psi_1(t) = \alpha\,\mathrm{ch}\,t$, $\psi_2(t) = \beta(e^t + e^{2-t}) = \beta e\,\mathrm{ch}(t-1)$. . . . . . . . $\boxed{2}$

La condition $W(\psi_1, \psi_2) = 1$ entraîne $\alpha\beta = \dfrac{1}{1-e^2} = -\dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}$ d'où

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{-\mathrm{ch}\,x \times \mathrm{ch}(t-1)}{2\,\mathrm{sh}\,1} & 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{-\mathrm{ch}\,t \times \mathrm{ch}(x-1)}{2\,\mathrm{sh}\,1} & 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

**II.2. a.** On utilise l'inégalité des accroissements finis en posant $X = (t,x)$ et $Y = (u,y)$ :

$$|H(1) - H(0)| = |G(X) - G(Y)| \leqslant \sup_{t\in]0,1[} |H'(v)|,$$

or $H(v) = G[(1-v)y + vx, (1-v)t + vu] = \psi_2[(1-v)y + vx] \times \psi_1[(1-v)t + vu]$ donc

$$H'(v) = (x-y)\psi_2'[(1-v)y + vx] \times \psi_1[(1-v)t + vu] \\ + (u-t)\psi_2[(1-v)y + vx] \times \psi_1'[(1-v)t + vu]$$

$$|H'(v)| \leqslant |x-y|M_2'M_1 + |u-t|M_2M_1'$$

où $M_i$ et $M_i'$ désignent des majorants des fonctions continues $\psi_i$ sur $[0,1]$.

On obtient finalement $|G(X) - G(Y)| \leqslant A_1\|X - Y\|_2$ en appliquant Cauchy-Schwarz avec $A_1 = \sqrt{(M_2'M_1)^2 + (M_2M_1')^2}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{4}$

**b.** Sur $T' = \{(t,x) \mid 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1\}$ on a de même $|G(X) - G(Y)| \leqslant A_2\|X - Y\|_2$. . . $\boxed{1}$

Soit $A = \max(A_1, A_2)$ alors

- si $(X,Y) \in T^2$ ou $(X,Y) \in T'^2$ alors on a bien $|G(X) - G(Y)| \leqslant A\|X - Y\|_2$,

- si $(X,Y)\in T\times T'$, on prend $Z\in[X,Y]$ situé sur la diagonale d'où

$$\begin{aligned}|G(X)-G(Y)| &\leqslant |G(X)-G(Z)|+|G(Z)-G(Y)|\leqslant A\|X-Z\|_2+A\|Z-Y\|_2\\ &\leqslant A\|X-Y\|_2 \quad \text{car } Z\in[X,Y].\end{aligned}$$ 4

**II.3.** Plutôt que d'essayer d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe $\int$ on écrit

$$\begin{aligned}\Phi f(x) &= \int_0^x G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^1 G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \psi_2(x)\int_0^x \psi_1(t)f(t)\,\mathrm{d}t+\psi_1(x)\int_x^1 \psi_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

puis, en dérivant comme un produit et en simplifiant

$$\Phi f'(x)=\psi_2'(x)\int_0^x \psi_1(t)f(t)\,\mathrm{d}t+\psi_1'(x)\int_x^1 \psi_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

et finalement

$$\begin{aligned}\Phi f''(x) &= \psi_2''(x)\int_0^x \psi_1(t)f(t)\,\mathrm{d}t+\psi_1''(x)\int_x^1 \psi_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t+\underbrace{(\psi_2'(x)\psi_1(x)-\psi_1'(x)\psi_2(x))}_{=-1}f(x)\\ &= Q(x)\psi_2(x)\int_0^x \psi_1(t)f(t)\,\mathrm{d}t+Q(x)\psi_1(x)\int_x^1 \psi_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\end{aligned}$$

soit $-\Phi f''+Q\Phi f=f$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

En outre $a\Phi f(0)+b\Phi f'(0)=(a\psi_1(0)+b\psi'(0))\displaystyle\int_0^1 \psi_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et de la même manière $c\Phi f(1)+d\Phi f'(1)=0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

Unicité : si $g_1$ et $g_2$ sont deux solutions de $L_f$ alors $D(g_1-g_2)=0$ et, comme $D$ est injectif, $g_1=g_2$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

**II.4.** On vient de voir que $\Phi f\in E_2$ et que $D(\Phi f)=f$ i.e. $D\circ\Phi=\mathrm{Id}_E$.
Si $f\in E_2$, $f$ est l'unique solution de $L_{Df}$ donc $\Phi\circ D=\mathrm{Id}_{E_2}$.
Conclusion : $\Phi\ :E\to E_2$ et $D\ :E_2\to E$ sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

## Troisième partie : étude de $\Phi$ 64

**III.1.** **a.** Si on pose $f_1=\Phi g_1$ et $f_2=\Phi g_2$ alors $(\Phi g_1|g_2)=(f_1|Df_2)=(Df_1|f_2)=(g_1|\Phi g_2)$. 1

**b.** On a $\Phi g=\lambda g$ pour $g\in E_2\Leftrightarrow g=\lambda Dg$ et $\lambda\neq 0$ car $D$ et $\Phi$ sont bijectives.
Conclusion : $\lambda\in\mathrm{Sp}(\Phi)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\lambda}\in\mathrm{Sp}(D)$ et $E_\lambda(\Phi)=E_{1/\lambda}(D)\subset E_2$ et les sous-espaces propres de $\Phi$ sont de dimension 1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

**III.2.** $\Phi$ est évidemment linéaire. On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\Phi f(x)|\leqslant\left|\int_0^1 G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_0^1 |G(x,t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\|f\|_2.$$

Or $G$ est continue sur $[0,1]^2$ donc bornée par une constante $K$ d'où $\|\Phi f\|_\infty\leqslant K\|f\|_2$. 2

**III.3.** On reprend l'inégalité de la question précédente :

$$|\Phi g(x) - \Phi g(y)| \leqslant \left(\int_0^1 |G(x,t) - G(y,t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \|g\|_2.$$

Or $|G(x,t) - G(y,t)| \leqslant A|x-y|$ d'où

$$\forall g \in E,\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |\Phi g(x) - \Phi g(y)| \leqslant A|x-y|.\|g\|_2 \leqslant A|x-y|.\|g\|_\infty \qquad \boxed{2}$$

**III.4. a.** Soit $B$ une borne de l'ensemble des $\|g_n\|_2$ alors $|\Phi g_n(r_0)| \leqslant M\|g_n\|_2 \leqslant MB$.
- D'après Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_0$ tel que $\big(\Phi g_{\varphi_0(n)}(r_0)\big)_n$ converge.
- Supposons construites les applications $\varphi_k$, $k \leqslant K$ vérifiant les hypothèses. $\big(\Phi g_{\varphi_K(n)}(r_{K+1})\big)_n$ est une suite bornée dont on peut extraire une suite convergente $\big(\Phi g_{\varphi_{K+1}(n)}(r_{K+1})\big)_n$. . . . . . $\boxed{4}$

**b.** On pose $\psi(n) = \varphi_n(n)$ alors $\big(\Phi g_{\psi(n)}(r_k)\big)_n$ est une suite extraite de $\big(\Phi g_{\varphi_k(n)}(r_k)\big)_n$ pour $n \geqslant k$ donc $\forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\big(\Phi g_{\psi(n)}(x)\big)_n$ converge. . . . . . $\boxed{4}$

**c.** On va utiliser le critère de Cauchy uniforme.
On utilise l'inégalité du **III.3** i.e. $\left|\Phi g_{\psi(n)}(x) - \Phi g_{\psi(n)}(y)\right| \leqslant AB|x-y|$. Soit $\varepsilon > 0$, $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{AB}{K} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $F_K = \{\frac{p}{k},\ p \in [\![0,K]\!]\}$.
$F_K$ est de cardinal fini et donc

$$\exists N \mid \forall n \geqslant N,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall r \in F_K,\ |\Phi g_{\psi(n+m)}(r) - \Phi g_{\psi(n)}(r)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $x \in [0,1]$ alors $\exists p \in [\![0, K-1]\!] \mid \frac{p}{K} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{K}$ d'où

$$|\Phi g_{\psi(n+m)}(x) - \Phi g_{\psi(n)}(x)| \leqslant \underbrace{\left|\Phi g_{\psi(n+m)}(x) - \Phi g_{\psi(n+m)}(\frac{p}{K})\right|}_{\leqslant AB/K \leqslant \varepsilon/3}$$
$$+ \underbrace{\left|\Phi g_{\psi(n+m)}(\frac{p}{K}) - \Phi g_{\psi(n)}\frac{p}{K})\right|}_{\leqslant \varepsilon/3} + \underbrace{\left|\Phi g_{\psi(n)}(\frac{p}{K}) - \Phi g_{\psi(n)}(x)\right|}_{\leqslant \varepsilon/3} \leqslant \varepsilon$$

donc $\Phi g_{\psi(n)}$ converge uniformément sur $[0,1]$. . . . . . $\boxed{10}$

**III.5. a.** On utilise l'inégalité du **III.2** $\|\Phi g\|_2 \leqslant \|\Phi g\|_\infty \leqslant K\|g\|_2$ donc $M$ est bien définie, puis, par Cauchy-Schwarz $|(g|\Phi g)| \leqslant \|g\|_2.\|\Phi g\|_2 \leqslant M$ i.e. $M' \leqslant M$. . . . . . $\boxed{2}$

**b.** On a

$$(f+g|\Phi(f+g)) = (f|\Phi f) + \underbrace{(f|\Phi g) + (g|\Phi f)}_{=2\,\mathrm{Re}(g|\Phi f)} + (g|\Phi g)$$
$$\leqslant M'\|f+g\|^2 = M'\{\|f\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}[(g|f)] + \|g\|_2^2\}$$

d'où l'inégalité proposée. . . . . . $\boxed{2}$
L'autre inégalité est immédiate.

**c.** On fait la différence des 2 inégalités ci-dessus d'où

$$2\,\mathrm{Re}(g|\Phi f) \leqslant M'(\|f\|_2^2 + \|g_2\|^2) \qquad \boxed{1}$$

Si $f$ est unitaire, posons $g = \lambda \Phi f$ alors $\mathrm{Re}(g|\Phi f) = \lambda\|\Phi f\|_2^2$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|\Phi f\|_2^2 M' - 2\lambda\|\Phi f\|_2^2 + M' \geqslant 0$$

i.e. $\Delta' = \|\Phi f\|_2^4 - M'^2\|\Phi f\|_2^2 \leqslant 0$ soit, en distinguant les cas $\Phi f = 0$ et $\Phi f \neq 0$, $\|\Phi f\|_2^2 \leqslant M'^2$ par conséquent

$$\forall f \in F \mid \|f\|_2 = 1,\ \|\Phi f\|_2 \leqslant M' \text{ soit } M \leqslant M' \text{ puis } M = M'.$$ 5

**III.6.** **a.** Comme $(g_n|\Phi g_n) = (\Phi g_n|g_n) = \overline{(\Phi g_n|g_n)}$ alors $(g_n|\Phi g_n)$ est réel et on peut s'arranger pour qu'il garde un signe constant. .......... 3

On utilise alors la caractérisation de la borne supérieure. .......... 1

**b.** On a vu au **III.4** que l'on peut extraire une suite convergeant uniformément vers $T \in E_2$, puis, vu que $F$ est fermé et que $\Phi(F) \subset F \Rightarrow F \subset E_2$, alors $T \in F$. .... 2

**c.** Supposons que $(g_n|\Phi g_n) \to M$, comme $\|\Phi g_n\|_2 \leqslant M$ et que la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique, on a, par passage à la limite, $\|T\|_2 \leqslant M$. .......... 1

On calcule alors $\|\Phi g_n - Mg_n\|_2^2 = \|\Phi g_n\|_2^2 - 2M(\Phi g_n|g_n) + M^2\|g_n\|_2^2$, et par convergence uniforme, on obtient $\|\Phi g_n - Mg_n\|_2^2 \to \|T\|_2^2 - M^2$ ce qui entraîne que $\|T\|_2 \geqslant M$ et en conclusion $\|T\|_2 = M$. .......... 4

**d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\Phi g_n - Mg_n\|_2 = 0$ i.e. $g_n \to \dfrac{T}{M}$ et $\|S\|_2 = 1$.

Par continuité de $\Phi$ on a $\Phi S = MS$. .......... 2

**III.7.** **a.** Comme $(\Phi f|g) = (f|\Phi g)$ alors $\mu_0(f|g) = (\Phi f|g) = (f|\Phi g) = 0$ pour $g \in D_0^\perp$ donc $\Phi(D_0^\perp) \subset D_0^\perp$. .......... 1

$D_0^\perp$ est fermé pour $\|.\|_2$, montrons que $D_0^\perp$ est fermé pour $\|.\|_\infty$ :

Si $g_n \xrightarrow{\text{C.U.}} g \in E$ alors

$$\forall f \in D_0,\ (f|g_n) = \int_0^1 \overline{f}(t)g_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

i.e. $g \in D_0^\perp$. .......... 2

**b.** On applique alors le **III.6** à $F = D_0^\perp$ d'où l'existence de $\mu_1$ tel que $|\mu_1| \leqslant M$. On construit ainsi la suite $(\mu_N)$ par récurrence en prenant $F = (D_0 \oplus \cdots \oplus D_N)^\perp$. Comme au **a**, on prouve que $F$ est stable par $\Phi$ et fermé pour $\|.\|_\infty$. .......... 3

Comme les $\mu_N$ sont réels et distincts, on ne peut avoir $|\mu_k| = |\mu_{k+1}| = |\mu_{k+2}|$ sans que 2 des 3 réels $\mu_k$, $\mu_{k+1}$, $\mu_{k+2}$ ne soient égaux. .......... 1

**c.** $(|\mu_n|)$ est une suite décroissante positive, soit $l \neq 0$ sa limite.

Si $l > 0$ (par l'absurde), considérons $(g_n)$ une suite de fonctions unitaires associées (i.e. $\Phi g_n = \mu_n g_n$). On a $\|\Phi g_{n+p} - \Phi g_n\|_2^2 = \mu_{n+p}^2 + \mu_n^2 \geqslant 2l^2$ donc, comme $\|\Phi g_{n+p} - \Phi g_n\|_\infty \geqslant \|\Phi g_{n+p} - \Phi g_n\|_2 \geqslant l\sqrt{2}$, la suite $(\Phi g_n)$ n'admet pas de valeur d'adhérence ce qui est contraire à la conclusion de **III.4**.

On a ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = 0$. .......... 5

**d.** Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(\Phi)$, $0 < |\mu| \leqslant M$, il existe $n$ tel que $|\mu_n| \leqslant |\mu|$ (car $\mu_n \to 0$) donc, vu la construction faite au **b**, $\mu$ est l'une des valeurs propres $\mu_i$, $i \in [\![0, n]\!]$. .......... 2

**e.** On sait que les $\mu_n$ sont les inverses des valeurs propres de $D$ qui sont elles-mêmes minorées donc les $\mu_n$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs négatives. .. 2

## Quatrième partie : développement en série des fonctions de $E_2$. 32

**IV.1.** En effet, comme au **I.4**, si $\Phi\varphi_n = \mu_n\varphi_n$ alors $\mathrm{Re}(\varphi_n)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_n)$ vérifient la même relation et comme ces 2 fonctions ne peuvent être simultanément nulles, on peut se ramener au cas où $\varphi_n$ est réelle. . . . . . . . 1

**IV.2.** $a_n(\Phi g) = (\varphi_n|\Phi g) = (\Phi\varphi_n|g) = \mu_n(\varphi_n|g)$ car $\mu_n \in \mathbb{R}$. On a ainsi $a_n(\Phi g) = \mu_n a_n(g)$. . . 1

**IV.3. a.** Si $g \in F$ alors $a_n(\Phi g) = \mu_n a_n(g) = 0$ donc $F$ est stable par $\varphi$. . . . . . . . 1

$F$ est fermé (c'est le même argument qu'au **III.7.a**). . . . . . . . 1

**b.** On suppose donc $F \neq \{0\}$ donc, grâce au **III.6**, il existe $M \neq 0$ et $S \in F$ tels que $\Phi(S) = \pm MS$, $M$ étant une valeur propre de $\Phi$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M = \mu_n$ et alors $S = \lambda\varphi_n$ ce qui est impossible.

Conclusion : $F = \{0\}$. . . . . . . . 3

**IV.4.** Soit $F_N = \mathrm{Vect}(\varphi_n)_{n\leqslant N}$. La famille $(\varphi_n)$ est orthonormée donc, en écrivant $g = p_{F_N}g + (g - p_{F_N}g)$ on a $\|g\|_2^2 = \|p_{F_N}g\|_2^2 + \|g - p_{F_N}g\|_2^2$ soit

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n(g)|^2 = \|p_{F_N}g\|_2^2 \leqslant \|g\|_2^2$$

donc $\sum |a_n(g)|^2$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n(g)|^2 \leqslant \|g\|_2^2$. . . . . . . . 3

**IV.5. a.** Comme $a_n(\Phi f) = \mu_n a_n(f)$ l'inégalité proposée est une simple conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. . . . . . . . 1

**b.** $a_n(g_x) = \displaystyle\int_0^1 G(x,t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \Phi\varphi_n(x) = \mu_n\varphi_n(x)$ donc la série $\sum(\mu_n\varphi_n(x))^2$ converge et

$$\sum_{n=N}^{N+p} (\mu_n\varphi_n(x))^2 \leqslant \int_0^1 G(x,t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant B^2$$

où $B$ est une borne de $G$ sur $[0,1]^2$. . . . . . . . 4

**c.** On a alors $\sum\limits_{n=N}^{N+p} |a_n(\Phi f)\varphi_n(x)| \leqslant \left(\sum\limits_{n=N}^{N+p} |a_n(f)|^2\right)^{1/2} B$ i.e. la série $\sum a_n(\Phi f)\varphi_n$ converge uniformément donc sa somme $H(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(\Phi f)\varphi_n(x)$ est continue. . . . . . . . 3

**d.** Par le théorème d'interversion $\int$ et $\sum$ (on a convergence uniforme) $a_n(H) = a_n(\Phi f)$ et, grâce à l'injectivité de $g \mapsto (a_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que $H = \Phi f$. . . . . . . . 3

**e.** On prend $g = \Phi f \in E$ et on applique ce qui précède ! . . . . . . . . 2

**IV.6.** **a.** Comme $a_n(\Phi g_x) = \mu_n a_n(g_x)$ et $a_n(g_x) = \int_0^1 G(x,t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(\varphi_n)(x) = \mu_n\varphi_n(x)$ alors, en utilisant la question **IV.5.d**, on a

$$\begin{aligned}\Phi g_x(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\Phi g_x)\varphi_n(x)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n a_n(g_x)\varphi_n(x)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^2\varphi_n^2(x)\\ &= \int_0^1 G^2(x,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La suite de fonctions $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \mu_n^2\varphi_n^2(x)$ converge simplement vers $\int_0^1 G^2(x,t)\,\mathrm{d}t$ (fonction continue grâce au théorème de continuité sous le signe intégral) et, pour $x$ fixé, la suite $(f_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante ce qui permet de conclure à la convergence uniforme en appliquant le théorème de Dini. .................................... $\boxed{5}$

**b.** On intégre alors terme à terme la série ci-dessus grâce à la convergence uniforme, on obtient finalement $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^2\|\varphi_n\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n^2 = \int_0^1\int_0^1 G^2(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. ................. $\boxed{4}$

## Cinquième partie : Résolution du problème de Sturm-Liouville et applications $\boxed{43}$

**V.1.** Si on prend $\lambda = \alpha$, les valeurs propres de $\Phi_\lambda$ sont alors $\dfrac{1}{\lambda_n - \lambda}$, le problème de Sturm-Liouville est équivalent à $(D - \lambda\,\mathrm{Id})g = f \Leftrightarrow g = \Phi_\lambda f$. On applique alors le théorème de Hilbert-Schmidt à condition de vérifier que les $\varphi_n$ sont les fonctions propres de $\Phi_\lambda$ associées aux $\dfrac{1}{\lambda_n-\lambda}$. Or

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha\varphi_n = \mu_n\varphi_n &\Leftrightarrow \mu_n D_\alpha\varphi_n = \varphi_n\\ &\Leftrightarrow D_\alpha\varphi_n + \alpha\varphi_n - \lambda\varphi_n = (\alpha - \lambda + \frac{1}{\mu_n})\varphi_n = (\lambda_n - \lambda)\varphi_n\\ &\Leftrightarrow (D - \lambda\,\mathrm{Id})\varphi_n = (\lambda_n - \lambda)\varphi_n\end{aligned}$$

soit $\Phi_\lambda(\varphi_n) = \dfrac{1}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n$ ce qui permet de conclure :

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda}(\varphi_n|f)\varphi_n.$$ $\boxed{4}$

**V.2.** **a.** Si $L_f$ admet des solutions, $\varphi_p$ appartient au noyau de $D - \lambda_p\,\mathrm{Id}$ et $f$ appartient à son image donc $(\varphi_p|f) = 0$ car son image est orthogonale à son noyau. .............. $\boxed{3}$

**b.** On sait que l'on peut chercher les solutions de $L_f$ sous la forme $g = \lambda\varphi_p + \mu\psi_p$ où $\lambda$ et $\mu$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\lambda'\varphi_p + \mu'\psi_p = 0$ (méthode de variation des constantes).

On a ainsi $g'(x) = \lambda(x)\varphi_p'(x) + \mu(x)\psi_p'(x)$ (en imposant $\lambda'(x)\varphi_p(x) + \mu'(x)\psi_p(x) = 0$)

et la condition $ag(0)+bg'(0)=0$ entraîne que

$$\lambda(0)\underbrace{[a\varphi_p(0)+b\varphi_p'(0)]}_{=0}+\mu(0)[a\psi_p(0)+b\psi_p'(0)]=0$$

donc $\mu(0)=0$ (et on a équivalence). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{4}$

On obtient alors l'expression

$$g(x)=-\varphi_p(x)\left(C+\int_0^x\psi_p(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)+\psi_p(x)\int_0^x\varphi_p(t)f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \boxed{2}$$

La fonction $g$ ainsi définie vérifie aussi la condition en 1 car, comme $a_p(f)=0$ on a

$$g(1)=-\varphi_p(1)\left(C+\int_0^1\psi_p(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)\text{ et }g'(1)=-\varphi_p'(1)\left(C+\int_0^1\psi_p(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

et il est alors immédiat que $cg(1)+dg'(1)=0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{3}$

**c.** On applique le résultat du **IV.5**, les solutions cherchées sont sommes des séries $\sum a_n(g)\varphi_n$.
Calculons les $a_n(g)$ : l'équation $-y''+Qy=\lambda_p y+f$ s'écrit $D_\alpha(y)=(\lambda_p-\alpha)y+f$ et donc $a_n(D_\alpha(g))=(\lambda_p-\alpha)a_n(g)+a_n(f)$ ce qui s'écrit encore $(\lambda_n-\lambda_p)a_n(g)=a_n(f)$.
Pour $n\neq p$ on a $a_n(g)=\dfrac{a_n(f)}{\lambda_n-\lambda_p}$, $a_p(g)$ est quelconque et on obtient l'ensemble des solutions

$$g=C\varphi_p+\sum_{n\neq p}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}(\varphi_n|f)\varphi_n \qquad \boxed{5}$$

**V.3. a.** On cherche les solutions des équations $y''+\lambda y=0$ avec les conditions aux limites $y(0)=0$, $y(1)=y'(1)$.

- $\lambda=-\omega^2<0$ : les solutions sont données par $y=\alpha\operatorname{ch}\omega x+\beta\operatorname{sh}\omega x$.
  $y(0)=0\Rightarrow\alpha=0$ et $y(1)=y'(1)\Rightarrow\beta\operatorname{sh}\omega=\beta\omega\operatorname{ch}\omega$ ce qui entraîne $\beta=0$.
  On n'a pas de solution dans ce cas. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{1}$
- $\lambda=0$ : $y=\alpha x+\beta$. $y(0)=0\Rightarrow\beta=0$ et $y(1)=y'(1)$ est automatiquement vérifié, la fonction unitaire propre est donnée par $\varphi_0(x)=\sqrt{2}x$. . . . . . . . . . . $\boxed{1}$
- $\lambda=\omega^2>0$ : les solutions sont données par $y=\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$.
  $y(0)=0\Rightarrow\alpha=0$ et $y(1)=y'(1)\Rightarrow\beta\sin\omega=\beta\omega\cos\omega$. On obtient alors une infinité de valeurs convenable qui correspondent aux valeurs de $\lambda_n$ carré de l'unique racine de l'équation $\tan x=x$ située dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$ pour $n\geqslant 1$. Les fonctions propres unitaires associées sont données par
  $\varphi_n(x)=\dfrac{\sin\omega_n x}{k_n}$ avec $k_n=\dfrac{2\omega_n-\sin 2\omega_n}{4\omega_n}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{3}$

**b.** On trouve

$$\begin{cases}\psi_1(x) &= \mu\operatorname{sh}\beta x\\ \psi_2(x) &= (\beta\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta)\operatorname{ch}\beta x+(\operatorname{ch}\beta-\beta\operatorname{sh}\beta)\operatorname{sh}\beta x\,.\\ &= \beta\operatorname{ch}\beta(x-1)+\operatorname{sh}\beta(x-1)\end{cases}$$

La condition supplémentaire $\psi_1'\psi_2-\psi_1\psi_2'=1$ donne une condition sur $\mu$ et la fonction de Green associée :

$$G_\beta(x,t)=\begin{cases}\dfrac{[\operatorname{sh}\beta(x-1)+\beta\operatorname{ch}\beta(x-1)]\operatorname{sh}\beta t}{\beta\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta} & \text{si } 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{[\operatorname{sh}\beta(t-1)+\beta\operatorname{ch}\beta(t-1)]\operatorname{sh}\beta x}{\beta\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \qquad \boxed{3}$$

**c.** La série $\sum \mu_n \varphi_n(x)\varphi_n(t)$ est normalement convergente sur $[0,1]^2$ car $\mu_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et les fonctions $\varphi_n$ sont uniformément bornées sur $[0,1]$. .......................... $\boxed{2}$

On appelle $H(x,t)$ la somme de cette série. Grâce à la convergence normale, on peut intégrer terme à terme d'où, pour $f \in E$,

$$\Phi f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\Phi f)\varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n a_n(f)\varphi_n = \int_0^1 H(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors $\displaystyle\int_0^1 (G(x,t) - H(x,t))f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour toute $f$ dans $E$.

En prenant $f(t) = G(x,t) - H(x,t)$ on en déduit que, pour $x \in [0,1]$, $G(x,t) = H(x,t)$ pour tout $t$ donc $G = H$. ...................................................... $\boxed{5}$

**d.** Il suffit d'intégrer terme à terme la relation $G(x,x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu_n \varphi_n^2(x)$ grâce à la convergence normale de la série. Le calcul de l'intégrale se fait alors à la machine....... $\boxed{3}$

**e.** On utilise la formule montrée ci-dessus, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n^2 + \beta^2} = \frac{\beta^2 \operatorname{sh}\beta - \beta \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta}{2\beta^2(\beta \operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta)} - \frac{1}{\beta^2}.$$

On va s'en tirer avec un simple développement limité :
on pose $N(\beta) = \beta^2 \operatorname{sh}\beta - \beta \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta$ et $D(\beta) = 2\beta^2(\beta \operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta)$ alors

$$N(\beta) = \frac{2\beta^3}{3} + \frac{2\beta^5}{15} + O(\beta^7),\ D(\beta) = 2\beta^2\left(\frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{30} + O(\beta^7)\right)$$

d'où, après calculs, $\dfrac{N(\beta)}{D(\beta)} = \dfrac{1}{\beta^2}\left(1 + \dfrac{\beta^2}{10} + o(\beta^2)\right)$.

Il reste alors à montrer que la série est normalement convergente pour $\beta \geqslant 0$ ce qui est manifestement évident car $u_n^2 + \beta^2 \geqslant u_n^2$. On peut finalement conclure. ....... $\boxed{4}$