POLYTECHNIQUE-ENS Corrigé 2011 MATH A-(XLC) MP

réalisée par Mr HAMANI AHMED prof de Maths spé TSI Mohammedia

Première partie : étude de $\mathcal{N}_n$

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $x,y \in \mathbb{C}^n$, on a $A^* = {}^t\overline{A}$, donc $(A^*x|y) = ({}^t\overline{A}x|y) = {}^t({}^tA\overline{x})y = {}^t\overline{x}Ay = (x|Ay))$.
2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $\forall x,y \in \mathbb{C}^n$ $(Ax|Ay) = (x|y)$ si et seulement si $\forall x,y \in \mathbb{C}^n$ $(A^*Ax|y) = (x|y)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{C}^n$ $A^*Ax = x$ si et seulement si $A^*A = I_n$ et puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est finie ceci est équivalent à $AA^* = I_n$.
   (b) Notons $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de la matrice A, alors $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $A^*A = I_n$ si et seulement si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$ $(A^*A)_{i,j} = (I_n)_{i,j}$ si et seulement si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$ ${}^t\overline{C_i}C_j = \delta_{i,j}$ si et seulement si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$ $(C_i|C_j) = \delta_{i,j}$ si et seulement si $(C_1,\ldots,C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.
3. (a) • Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et soit $x \in (\ker((A))^\perp$. Montrons que pour tout $y \in \ker(A)$ $(Ax|y) = 0$.
   On a $A^*A = AA^*$ et $Ay = 0$, donc $AA^*y = A^*Ay = 0$, ce qui entraîne que $A^*y \in \ker(A)$ et puisque $x \in (\ker(A))^\perp$, on aura $(x|A^*y) = 0$ d'où $(Ax|y) = (x|A^*y) = 0$, ce qui assure l'inclusion demandée.
   • Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, alors $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$, or $(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^* = AA^* - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + |\lambda|^2 I_n = A^*A - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I_n = (A - \lambda I_n)^*(A - \lambda I_n)$, donc $(A - \lambda I_n) \in \mathcal{N}_n$, et par application de l'inclusion précédente, on obtient $A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$.
   (b) • Soit $A = UDU^*$ où $U \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$, alors $AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UDU^*UD^*U^*$, or si $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ alors $DD^* = \mathrm{Diag}\,(|\lambda_1|^2,\ldots,|\lambda_1|^2) = D^*D$, de plus $UU^* = U^*U$, donc $AA^* = UDD^*U^* = UD^*DU^* = (UD^*U^*)(UDU^*) = (UDU^*)^*(UDU^*) = A^*A$.
   • Réciproquement soit $A \in \mathcal{N}_n$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrons par récurrence sur n que f admet une base orthonormale de vecteurs propres.
   ⋆ Pour $n = 1$, rien à montrer.
   ⋆ Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ $(k \leq n-1)$, et soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{N}_n$ (qui existe puisque A est de polynôme caractéristique scindé).
   Si $E_\lambda = \mathbb{C}^n$, alors $A = \lambda I_n$ et n'importe quelle base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ répond à la question.
   Si $E_\lambda \neq \mathbb{C}^n$, alors $1 \leq \dim(E_\lambda)^\perp \leq n-1$, or $f((E_\lambda)^\perp) \subset (E_\lambda)^\perp$, donc la matrice de f dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = E_\lambda \oplus (E_\lambda)^\perp$ est de la forme $B = \begin{pmatrix} I_p & O_{n-p} \\ O_{n-p} & A_1 \end{pmatrix}$
   où $p = \dim(E_\lambda)$ et A_1 est la matrice de la restriction f_1 de f à $(E_\lambda)^\perp$.
   On aura $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base orthonormée canonique de $\mathbb{C}^n$ à cette dernière base qu'on a choisit orthonormée, ce qui la rend d'après la question 2*b*., dans $\mathcal{U}_n$, et par conséquent $B = P^*AP$. On vérifie facilement que $B^*B = P^*A^*PP^*AP = P^*A^*AP = P^*AA^*P = BB^*$ et un calcul par blocs donne $B^*B = \begin{pmatrix} I_p & O_{n-p} \\ O_{n-p} & A_1^*A_1 \end{pmatrix}$ et $BB^* = \begin{pmatrix} I_p & O_{n-p} \\ O_{n-p} & A_1A_1^* \end{pmatrix}$, ce qui entraîne que $A_1^*A_1 = A_1A_1^*$, donc $A_1 \in \mathcal{N}_{n-p}(\mathbb{R})$, et l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une base orthonormale de $(E_\lambda(A))^\perp$ constituée de vecteurs propres de f_1, donc de f.
   En réunissant les deux bases orthonormales de $E_\lambda(A)$ et de $(E_\lambda(A))^\perp$, on obtient une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de f, ce qui établit la récurrence.
   ⋆ Conclusion : Soit U la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base orthonormale de vecteurs propre de f, alors la formule de changement de bases s'écrit $A = UDU^*$, où $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, les λ_i étant les valeurs propres de A et $U \in \mathcal{U}_n$.
4. Soit $A \in \mathcal{N}_n$, alors la question précédente assure qu'il existe $U \in \mathcal{U}_n$ et $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ tel que $A = UDU^*$.
   D'une part : $\mathrm{Tr}\,(AA^*) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\overline{A_{i,j}} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |A_{i,j}|^2$ et d'autre part : $\mathrm{Tr}\,(AA^*) = \mathrm{Tr}\,(UDU^*UD^*U^*) = \mathrm{Tr}\,(UDD^*U^*) = \mathrm{Tr}\,(DD^*U^*U) = \mathrm{Tr}\,(DD^*) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, ce qui entraîne l'égalité demandée.
5. (a) Soit $A \in \mathcal{N}_n$, alors $\forall x \in \mathbb{C}$ $\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (x|A^*Ax) = (x|AA^*x) = (A^*x|A^*x) = \|A^*x\|^2$, ce qui entraîne l'équivalence : $Ax = 0$ si et seulement si $A^*x = 0$, d'où l'égalité : $\ker(A) = \ker(A^*)$.
   (b) • $(i) \Longrightarrow (ii)$: Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et x un vecteur propre de A, alors il existe λ valeur propre de A tel que $x \in \ker(A - \lambda I_n)$, or d'après le (a) $\ker(A - \lambda I_n) = \ker((A - \lambda I_n)^*) = \ker(A^* - \overline{\lambda}I_n)$, ce qui entraîne que $x \in \ker(A^* - \overline{\lambda}I_n)$, c'est à dire que x est vecteur propre de A^* associé à $\overline{\lambda}$.
   • $(ii) \Longrightarrow (i)$: On va raisonner par récurrence sur n.
   ⋆ Si $n = 1$, $A = (a)$ et $A^* = (\overline{a})$, donc on toujours $AA^* = A^*A$.
   ⋆ Supposons que l'implication est vérifiée pour toute matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que la proposition (ii) est vérifiée. Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A et soit x un vecteur propre de A, alors d'après (ii), x est aussi vecteur propre de A^*, ce qui assure l' existence de $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A^*x = \alpha x$. Je dis que $F = (\mathrm{Vect}\,(x))^\perp$ est stable par A, en effet pour tout $y \in F$ $(Ay|x) = (y|A^*x) = \alpha(y|x) = 0$(ce résultat est généralement vrai : un sous espace de $\mathbb{C}^n$ est

stable par A si et seulement si son orthogonal est stable par A^*). La matrice de f dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(x) \oplus F$ et de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1 \end{pmatrix}$ où A_1 est la matrice de la restriction f_1 de f à F. A_1 vérifie la propriété (ii), donc d'après l'hypothèse de récurrence $A_1 \in \mathcal{N}_{n-1}$, or si $U \in \mathcal{U}_n$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(x) \oplus (\mathrm{Vect}(x))^\perp$, alors

$$A = U\begin{pmatrix} \alpha & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1 \end{pmatrix}U^* \text{ donc } AA^* = U\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1A_1^* \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1^*A_1 \end{pmatrix}U^* = A^*A,$$

ce qui établit la récurrence.

6. (a) soit $A \in \mathcal{N}_n$ et soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ ($p \le n$) les valeurs propres distinctes deux à deux de A, alors si L est l'unique polynôme interpolateur de Lagrange tel que $L(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.
   D'après la question 3*b*., il existe $U \in \mathcal{U}_n$ tel que $A = U\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U^*$, et par récurrence on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A^k = U\mathrm{Diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)U^*$, ce qui entraîne par combinaison linéaire que :
   $L(A) = U\mathrm{Diag}(L(\lambda_1),\dots,L(\lambda_n))U^* = U\mathrm{Diag}(\overline{\lambda_1},\dots,\overline{\lambda_n})U^* = A^*$,ce qui répond à la question.

   (b) Soient $A,B \in \mathcal{N}_n$ tels que $AB = BA$.
   ⋆ Montrons d'abord que A commute avec B^*. D'après la question précédente $B^* = P(B)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$, or une récurrence simple conduit à $AB^k = B^kA$, ce qui entraîne par combinaison linéaire que $AP(B) = P(B)A$, c'est à dire $AB^* = B^*A$.
   ⋆ Avec l'égalité $AB^* = B^*A$ on obtient : $(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AB^*BA^* = B^*AA^*B = B^*A^*AB = (AB)^*(AB)$, ce qui assure que $AB \in \mathcal{N}n$.

7. • $(ii) \Longrightarrow (i)$: Supposons qu'il existe $U \in \mathcal{N}_n$ tel que $A^* = AU$, donc $AA^* = A^2U = AUA = A^*A$.
   • $(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que $A \in \mathcal{N}_n$. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres non nulles de A, $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p,0,\dots,0)$ et $\triangle = \mathrm{Diag}(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_p},0,\dots,0)$, alors d'après la question 3*b*, il existe $V \in \mathcal{U}_n$ tel que $A = VDV^*$. Posons $U = V\triangle_1 D_1^* V^*$, où $\triangle_1 = \mathrm{Diag}(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_p},1,\dots,1)$ et $D_1 = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p,1,\dots,1)$.
   Les relations $D\triangle_1 D_1^* = \triangle_1 D_1^* D = D^*$ entraînent que $AU = UA = A^*$ et la relation $\triangle_1 D_1^* \triangle_1^* D_1 = I_n$ entraîne que $UU^* = I_n$, donc U répond à la question.

Deuxième partie : valeur singulière d'une matrice.

8. • $\Longrightarrow$ **:** ⋆ Soit $A \in \mathcal{H}_n$, alors $A^* = A$, donc $A^*A = AA^* = A^2$ c'est un élément de $\mathcal{N}_n$, ce qui entraîne par la question 3*b* que A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
   ⋆ Soit λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$, donc $(x,Ax) = \lambda\|x\|^2$ et $(Ax,x) = \overline{\lambda}\|x\|^2$, et puisque $A \in \mathcal{H}_n$, $(x,Ax) = (Ax,x)$, ce qui entraîne que $\lambda\|x\|^2 = \overline{\lambda}\|x\|^2$, le vecteur x étant non nul, donc $\lambda = \overline{\lambda}$.
   ⋆ Si de plus $A \in \mathcal{H}_n^+$, alors $\lambda = \frac{(x,Ax)}{\|x\|^2} \ge 0$.
   • $\Longleftarrow$: ⋆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres réelles, diagonalisable dans une base orthonormale, alors il existe $U \in \mathcal{U}_n$ et D diagonale réelle tels que $A = UDU^*$, donc $A^* = UD^*U^*$, or D est réelle, donc $D^* = D$, et par suite $A^* = A$.
   ⋆ Si de plus les valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de A sont positifs. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ la base orthonormale de vecteurs propres de A, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_iu_i$ on a : $(x,Ax) = \sum_{i=1}^n \lambda_i|x_i|^2 \ge 0$, donc $A \in \mathcal{H}_n^+$.

9. • **Existence** : Soit $A \in \mathcal{H}_n^+$,d'après la question précédente, il existe $U \in \mathcal{U}_n$, $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une matrice diagonale tel que $A = UDU^*$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_n \ge 0$. On pose $\triangle = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$, alors $S = U\triangle U^*$, alors $S \in \mathcal{H}_n^+$ (ses vap sont positives), et $S^2 = U\triangle U^*U\triangle U^* = U\triangle^2U^* = UDU^* = A$.
   • **Unicité** : A étant diagonalisable, donc $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda$,sur chaque E_λ on a $A = \lambda I_{\dim(E_\lambda)}$, or $S^2 = A$ et $S \in \mathcal{H}_n^+$, donc $S = \sqrt{\lambda} I_{\dim(E_\lambda)}$), ce qui montre que S est définie d'une façon unique sur chaque E_λ, d'où l'unicité.

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la décomposition polaire assure l'existence de $U_1 \in \mathcal{U}_n$ et $S \in \mathcal{H}_n^+$ tel que $A = U_1S$, et la question 8 assure qu'il existe $U_2 \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$ à éléments diagonaux positifs tel que $S = U_2DU_2^*$, ce qui donne la décomposition en valeurs singulières de A à savoir $A = U_1S = U_1U_2DU_2^* = UDW$, avec $U = U_1U_2$ et $W = U_2^*$.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   • **Existence** : D'après la question 10., il existe $U_1,V_1 \in \mathcal{U}_n$, $\triangle = \mathrm{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ matrice diagonale avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des réels $\geqslant 0$, tel que $A = U_1\triangle V_1$. Posons $D = \mathrm{Diag}(\alpha_{\sigma_1},\dots,\alpha_{\sigma_n})$ tel que $\alpha_{\sigma_1} \ge \dots \ge \alpha_{\sigma_n}$ et $\{\alpha_{\sigma_1},\dots,\alpha_{\sigma_n}\} = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, alors si P est la matrice de la permutation σ, $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ et $\triangle = PDP^*$, ce qui entraîne que $A = U_1PDP^*V_1 = UDV$ où $U = U_1P$ et $V = P^*V_1$.
   • **Unicité** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = UDV$ une décomposition singulière tel que $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ où les α_i sont des réels positifs, alors $AA^* = UD^2U^*$, donc $\alpha_1^2,\dots,\alpha_n^2$ sont les valeurs propres de AA^*. Supposons l'existence de $\beta_1 \ge \dots \ge \beta_n$ des valeurs singulières de A, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k^2 = \beta_k^2$ et vu que les α_k,β_k sont positifs, on aura $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Troisième partie : inégalité de trace

12. Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P}_k)$: $P^2 = P = P^*$ et $rang(P) = k$.

    (a) **•(i) :** L'égalité $P^*P = P$ entraîne que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $(P^*P)_{i,i} = P_{i,i}$, c'est à dire : $\sum\limits_{j=1}^{n} |P_{i,j}|^2 = P_{i,i}$, et puisque $P = P^*$, on aura $P_{i,i} = \overline{P_{i,i}}$ donc $P_{i,i} \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que : $\sum\limits_{j \neq i} |P_{i,j}|^2 = P_{i,i} - P_{i,i}^2 = P_{i,i}(1 - P_{i,i}) \geq 0$, donc $P_{i,i} \in [0,1]$.

    •(ii) : L'égalité $P = P^*$ fait de P une matrice de $\mathcal{H}_n$, donc diagonalisable dans une base orthonormale, de plus $P(P - I_n) = O_n$, donc les valeurs propres de P sont 0 et 1, d'où l'existence de $U \in \mathcal{U}_n$ et $J_k = \mathrm{Diag}\,(1,\dots,1,0,\dots,0)$ (les 1 sont en nombre de $k = rang(P)$) tel que $P = UJ_kU^*$, ce qui entraîne que $\mathrm{Tr}\,(P) = \mathrm{Tr}\,(J_k) = k$, c'est à dire $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{i,i} = k$.

    (b) • On a : $\mathrm{Tr}\,(PD) - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{i,i}\lambda_i - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{k} (P_{i,i} - 1)\lambda_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} P_{i,i}\lambda_i$.
    Or pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\lambda_i \geq \lambda_{k+1}$ et $P_{i,i} - 1 \leqslant 0$ donc $(P_{i,i} - 1)\lambda_i \leqslant (P_{i,i} - 1)\lambda_{k+1}$. Puis, pour tout $i \in [\![k+1,n]\!]$, $\lambda_i \leq \lambda_{k+1}$, donc $\sum\limits_{i=k+1}^{n} P_{i,i}\lambda_i \leqslant \lambda_{k+1} \sum\limits_{i=k+1}^{n} P_{i,i} = \lambda_{k+1}\left(k - \sum\limits_{i=1}^{k} P_{i,i}\right)$, ce qui donne finalement que $\mathrm{Tr}\,(PD) - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} [(P_{i,i} - 1)\lambda_{k+1} - P_{i,i}\lambda_{k+1}] + k\lambda_{k+1} = 0$.

    • La matrice $P = J_k = \mathrm{Diag}\,(1,\dots,1,0,\dots,0)$ répond à la question (les 1 sont en nombre de k).

    (c) • P_1,P_2 vérifient $(\mathcal{P}_k)$, donc ils sont semblables à J_k, et par suite il existe $U_1,U_2 \in \mathcal{U}_n$ tels que $P_1 = U_1J_kU_1^*$ et $P_2 = U_2J_kU_2^*$, ce qui donne $P_2 = U_2U_1^*P_1U_1U_2^* = UP_1U^*$, avec $U = U_2U_1^*$ qui est élément de $\mathcal{U}_n$ comme produit de deux éléments de $\mathcal{U}_n$.

    • Soit P fixé vérifiant la propriété $(\mathcal{P}_k)$. D'une part pour tout $U \in \mathcal{U}_n$ la matrice UPU^* vérifie aussi la propriété $\mathcal{P}_k$, donc d'après la question précédente $\mathrm{Tr}\,(UPU^*D) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

    • D'autre part il existe $U \in \mathcal{U}_n$ tel que $P = UJ_kU^*$ où $J_k = \mathrm{Diag}\,(1,\dots,1,0,\dots,0)$ (les 1 sont en nombre de k), donc $\mathrm{Tr}\,(U^*PUD) = \mathrm{Tr}\,(J_kD) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Diag}\,(\lambda_1,\dots,\lambda_k,0,\dots,0)) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$. Donc cette dernière somme est atteinte, ce qui entraîne l'égalité demandée.

13. Soit $U \in \mathcal{U}_n$, alors d'après la question 2b, ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$, donc la norme de chaque colonne vaut 1, c'est à dire $\sum\limits_{i=1}^{n} |U_{i,k}|^2 = 1$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
    La matrice $U^* \in \mathcal{U}_n$, donc les lignes de U forment aussi une base orthonormale, donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ $\sum\limits_{j=1}^{n} |U_{k,j}|^2 = 1$ (c'est la norme de la $k^{\text{ème}}$ ligne).
    On conclut que U est doublement stochastique.

14. (a) L'hypothèse : A stochastique et k le plus petit entier tel que $A_{k,k} \neq 1$ montre que la matrice A est de la forme $A = \begin{pmatrix} I_{k-1} & & O & \\ & A_{k,k} & \dots & A_{k,n} \\ O & \vdots & \ddots & \vdots \\ & A_{n,k} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}$
    Supposons que $\forall m > k\ A_{m,k} = 0$, alors en prenant la somme de la $k^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1, on obtient $A_{k,k} = 1$, ce qui est absurde.
    Le même raisonnement sur la $k^{\text{ème}}$ ligne aboutit à une absurdité, ce qui entraîne l'existence de $l > k$ tel que $A_{k,l} \neq 0$.
    Supposons que $A_{m,l} = 1$, alors puisque la somme des éléments de la $l^{\text{ème}}$ colonne vaut 1, on obtient $A_{k,l} = 0$, ce qui est absurde.

    (b) • La condition (i) montre qu'il suffit de déterminer $A'_{k,k}$,$A'_{m,k}$,$A'_{k,l}$ et $A'_{m,l}$.
    La condition (ii) nous invite à choisir $A'_{m,k}A'_{k,l} = 0$, quitte à échanger m avec l et α_i avec β_i, on peut prendre par exemple $A'_{m,k} = 0$.
    Les matrices A et A' étant stochastiques, donc en considérant successivement les lignes k et m, puis les colonnes k et l, on obtient $\begin{cases} A'_{k,k} + A'_{k,l} = A_{k,k} + A_{k,l} \\ A'_{m,l} = A_{m,k} + A_{m,l} \end{cases}$ et $\begin{cases} A'_{k,k} = A_{k,k} + A_{m,k} \\ A'_{k,l} + A'_{m,l} = A_{k,l} + A_{m,l} \end{cases}$
    Ce qui donne $A'_{m,l} = A_{m,k} + A_{m,l}$, $A'_{k,k} = A_{k,k} + A_{m,k}$, $A'_{k,l} = A_{k,l} - A_{m,k}$.
    On vient de déterminer la matrice A'. Voyons la troisième condition qui s'écrit :
    $A'_{k,k}\alpha_k\beta_k + A'_{m,k}\alpha_m\beta_k + A'_{k,l}\alpha_k\beta_l + A'_{m,l}\alpha_m\beta_l \geq A'_{k,k}\alpha_k\beta_k + A'_{k,l}\alpha_k\beta_l + A'_{m,l}\alpha_m\beta_l$,

    c'est à dire : $(\alpha_k - \alpha_m)(\beta_k - \beta_l)A_{m,k} \geq 0$, inégalité toujours vérifiée.

    • Montrons par récurrence l'inégalité $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

- $\star$ pour $n=1$ on a égalité.
- $\star$ Supposons que le résultat est vrai $\forall k \leq n-1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice stochastique.
- $\star$ Si $A = I_n$, alors on a égalité .

  Si $A \neq I_n$, soit A' la matrice définie précédemment. La matrice A'' extraite de A' en supprimant les k premières lignes et colonnes est stochastique de $M_{n-k}(\mathbb{C})$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum\limits_{i,j=k}^{n} A'_{i,j}\alpha_i\beta_j \leq \sum\limits_{i=k}^{n} \alpha_i\beta_i$, donc $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j \leq \sum\limits_{i=1}^{n} A'_{i,j}\alpha_i\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i\beta_i + \sum\limits_{i=k}^{n} A'_{i,j}\alpha_i\beta_j \leq \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i\beta_i + \sum\limits_{i=k}^{n} \alpha_i\beta_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, ce qui établit la récurrence.
- $\star$ La matrice $A = I_n$ réalise l'égalité $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

  On conclut finalement que : $\max\limits_{A\in\mathcal{DS}_n} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_j$.

15. (a) Par définition il existe $U_1,V_1,U_2,V_2 \in \mathcal{U}_n$ tels que $A = U_1DV_1$ et $B = U_2TV_2$, donc $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(U_1DV_1U_2TV_2) = \mathrm{Tr}\,(V_2U_1DV_1U_2T = \mathrm{Tr}\,(UDVT))$ où $U = V_2U_1$ et $V = V_1U_2$.

    (b) • $\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} (UD)_{i,j}(VT)_{j,i}$, or $(UD)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{i,k}D_{k,j} = \alpha_jU_{i,j}$, et en inversant les rôles $(VT)_{j,i} = \beta_iV_{j,i}$, ce qui entraîne l'égalité demandée.

    • L'inégalité évidente $|U_{i,j}V_{j,i}| \leq \dfrac{1}{2}(|U_{i,j}|^2 + |V_{j,i}|^2)$ entraîne que :
    $|\mathrm{Tr}\,(AB)| \leq \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} |U_{i,j}|^2\alpha_j\beta_i + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} |V_{j,i}|^2\alpha_j\beta_i$, or $U,V \in \mathcal{U}_n$, donc les matrices $(|U_{i,j}|^2)_{i,j}$ et $(|V_{i,j}|^2)_{i,j}$ sont doublement stochastiques (d'après la question 13), ce qui entraîne d'après la question 14 : $|\mathrm{Tr}\,(AB)| \leq \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$. C'est l'inégalité demandée.

    (c) Les matrices A,B étant dans $\mathcal{H}_n^+$, donc diagonalisables dans des bases orthonormales à valeurs propres réelles positives, qu'on peut les ordonner. Notons $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ les valeurs propres de A et $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_n$ celles de B, alors il existe $U,V \in \mathcal{U}_n$ tels que $A = UDU^*$ et $B = VTV^*$ où $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ et $T = \mathrm{Diag}\,(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, donc on est dans les conditions de la question précédente, ce qui entraîne $|\mathrm{Tr}\,(AB)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i)(\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i) = \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)$.

16. Soient $A,B \in \mathcal{H}_n$ de valeurs propres respectivement $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ et $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_n$.

- Montrons d'abord que $\max\limits_{U\in\mathcal{U}_n} \mathrm{Tr}\,(AU^*BU) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

  Soit $U \in \mathcal{U}_n$, A et B étant diagonalisables , U^*BU est semblable à B, donc les α_i et les β_i sont les valeurs singulières de A et de U^*BU respectivement, ce qui entraîne en utilisant la question 15, que $\mathrm{Tr}\,(AU^*BU) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

  La somme $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$ est atteinte, en effet, A et B sont diagonalisables dans des b.o.n. (d'après la question 8), d'où l'existence de $V,W \in \mathcal{U}_n$ tel que $V^*AV = D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ et $W^*BW = T = \mathrm{Diag}\,(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, donc $\mathrm{Tr}\,(A(WV^*)^*B(WV^*)) = \mathrm{Tr}\,(V^*AVW^*BW) = \mathrm{Tr}\,(DT) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

  On conclut donc que $\max\limits_{U\in\mathcal{U}_n} \mathrm{Tr}\,(AU^*BU) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

- Montrons maintenant l'égalité demandée.

  La norme $\|.\|$ est la norme hermitienne associée au produit scalaire $(A,B) = \mathrm{Tr}\,(A^*B) = \mathrm{Tr}\,(AB)$ (ce produit scalaire est à valeurs réelles, puisque les valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{U}_n$ sont réelles), ce qui entraîne que pour tout $U \in \mathcal{U}_n$: $\|A - U^*BU\|^2 = \|A\|^2 - 2(A,U^*BU) + \|U^*BU\|^2$,
  or $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\,(A^*A) = \mathrm{Tr}\,(V^*D^*VV^*DV) = \mathrm{Tr}\,(V^*D^2V) = \mathrm{Tr}\,(D^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2$,
  de même $\|U^*BU\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2$ et vu que $(A,U^*BU) = \mathrm{Tr}\,(AU^*BU) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, on aura l'inégalité :
  $\|A - U^*BU\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - 2\sum\limits_{i=1} \alpha_i\beta_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2)$.
  Cette dernière somme est atteinte, en effet :
  $\|A - (WV^*)^*B(WV^*)\|^2 = \|V^*AV - W^*BW\|^2 = \|D - T\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2$.

  On conclut donc l'égalité : $\min\limits_{U\in\mathcal{U}_n} \|A - U^*BU\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2}$.