SPÉCIALE MP* : DEVOIR SUR LES FRACTIONS CONTINUES

I - Développement en fraction continue d'un rationnel.

Soit $r = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ donné sous forme irréductible, on appelle développement en fraction continue d'un rationnel l'écriture :

$$r = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}.$$

(1) Montrer que, si l'on impose les conditions $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n > 1$, $a_k \geqslant 1$, $b_k = 1$ pour $k \geqslant 1$ alors l'écriture ci-dessus est possible et est unique, on dit que la fraction continue est sous forme normale. Quel algorithme permet d'avoir cette écriture ?

(2) Dans le cas où tous les b_k sont égaux à 1, montrer que

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \text{ où } r = \frac{\alpha}{\beta}.$$

On notera par la suite $r = [a_0; \dfrac{b_1}{a_1}, \dots \dfrac{b_n}{a_n}]$ le développement de r en fraction continue.

(3) Pour $k \in [1, n]$, on appelle $r_k = [a_0; \dfrac{b_1}{a_1}, \dots, \dfrac{b_k}{a_k}]$ la k-iéme réduite de r. $r_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ où

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ b_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix}.$$

a) Écrire les relations de récurrence liant P_k, P_{k-1}, P_{k-2} et Q_k, Q_{k-1}, Q_{k-2}.

b) Montrer que $\dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \dfrac{b_1 b_2 \dots b_k}{Q_{k-1} Q_k}$.

II - Développement en fraction continue normale d'un irrationnel.

On appelle $\mathcal{F} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_0 \in \mathbb{Z}$ et $u_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geqslant 1\}$ et $\mathcal{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels. On utilisera les résultats de la partie I. .

Pour $u \in \mathcal{F}$, on notera $M_k(u) = \begin{pmatrix} u_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R_{n,k}(u) = M_n(u) \dots M_{n+k}(u)$; si $n = 0$, on abrégera : $R_{0,k}(u) = R_k(u)$ et sa première colonne sera notée $\begin{pmatrix} P_k(u) \\ Q_k(u) \end{pmatrix}$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\det M \neq 0$ et $x \in \mathcal{I}$, on définit

$$M * x = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, Q_k(u) \in \mathbb{N}^*$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*, R_k(u) = \begin{pmatrix} P_k(u) & P_{k-1}(u) \\ Q_k(u) & Q_{k-1}(u) \end{pmatrix}$.

On écrira $r_k(u) = \dfrac{P_k(u)}{Q_k(u)}$.

(2) Pour $k \geqslant 1$, calculer $P_k(u).Q_{k-1}(u) - P_{k-1}(u).Q_k(u)$.
Montrer que la suite $(Q_k(u))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et que les suites $(r_{2k}(u))$, $(r_{2k+1}(u))$ sont adjacentes.
On note $r(u)$ la limite de la suite $(r_n(u))$.

(3) a) Montrer que $|r(u) - r_k(u)| < \dfrac{1}{Q_k(u)^2}$ pour $k \geqslant 1$. En déduire que $r(u) \in \mathcal{I}$.
b) Montrer que, pour $(c, d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, si $\left|\dfrac{c}{d} - r(u)\right| < |r_k(u) - r(u)|$ alors $d > Q_k(u)$.

(4) Pour $x \in \mathcal{I}$, on définit $f(x) = \dfrac{1}{x - [x]} \in \mathcal{I}$. On pose alors $u_k(x) = \left[f^k(x)\right]$ (composé k-ième de f en x), $u(x) = (u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ et $u_0(x) = [x]$.
a) Prouver que $u(x) \in \mathcal{F}$. On notera u à la place de $u(x)$ dans ce 4.
b) Montrer que $x = \dfrac{P_k(u)f^{k+1}(x) + P_{k-1}(u)}{Q_k(u)f^{k+1}(x) + Q_{k-1}(u)} = \begin{pmatrix} P_k(u) & P_{k-1}(u) \\ Q_k(u) & Q_{k-1}(u) \end{pmatrix} * f^{k+1}(u)$ pour $k \geqslant 1$.
En déduire que $r_{2k}(u) < x < r_{2k+1}(u)$ puis que $x = r(u)$.
u s'appelle le développement en fraction continue normale de x que l'on écrira $x = [u_0; \dfrac{1}{u_1}, \dots, \dfrac{1}{u_n}, \dots]$.
c) Si on connaît le développement en fraction continue normale de x, indiquer comment obtenir les développements en fraction continue normale de $x + a$, $a \in \mathbb{Z}$, $f^k(x)$, $-x$, $\dfrac{1}{x}$.

III - <u>Théorème de Lagrange</u>.

On considère ici l'ensemble $\mathcal{P}$ des éléments de $\mathcal{F}$ périodiques à partir d'un certain rang : $\mathcal{P} = \{(u_n) \in \mathcal{F} | \exists N \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant N, u_{n+p} = u_n\}$.

(1) Si $u \in \mathcal{P}$, prouver que $r(u)$ est racine d'une équation algébrique de degré 2 à coefficients entiers.
On s'intéresse maintenant à la réciproque : si x est un irrationnel racine d'une équation algébrique de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ alors le développement de x en fraction continue normale est périodique. On notera P_k à la place de $P_k(u)$, f^k à la place de $f^k(x)$ etc.
Soit $T(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma = 0$ cette équation, on pose $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

(2) À l'aide de la relation $x = \dfrac{P_k f^{k+1} + P_{k-1}}{Q_k f^{k+1} + Q_{k-1}}$, trouver pour tout $k \in \mathbb{N}$ un triplet $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $\alpha_k(f^k)^2 + \beta_k f^k + \gamma_k = 0$, on pose $\Delta_k = \beta_k^2 - 4\alpha_k\gamma_k$.

(3) Montrer que les triplets $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont en nombre fini (on démontrera et on utilisera la relation $\beta_k^2 - 4\alpha_k\gamma_k = \beta^2 - 4\alpha\beta$).
En déduire le théorème de Lagrange.

(4) Déterminer les développements en fraction continue des réels :
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \sqrt{5},\ \sqrt{41},\ \sqrt{a^2+1},\ \sqrt{a^2+2},\ \frac{1}{2}\left[a + \sqrt{a^2+4b}\right],\ (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2.$$

IV - <u>Développement des fonctions en fraction continue</u>.

(1) Soit $f(x) = \dfrac{c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1n_1}x^{n_1}}{c_{00} + c_{01}x + \cdots + c_{0n_0}x^{n_0}}$ une fraction rationnelle, montrer que l'on peut écrire
$$f(x) = [0; \frac{c_{10}}{c_{00}}, \frac{c_{20}x}{c_{10}}, \dots, \frac{c_{n0}x}{c_{n-1,0}}]$$

où les coefficients c_{jk} se calculent par récurrence avec la formule

$$c_{jk} = - \begin{vmatrix} c_{j-2,0} & c_{j-2,k+1} \\ c_{j-1,0} & c_{j-1,k+1} \end{vmatrix}$$

n étant un entier à déterminer.

(2) a) Lambert a obtenu le développement suivant pour $\tan x$:

$$\tan x = [0; \frac{x}{1}, \frac{-x^2}{3}, \dots, \frac{-x^2}{2n+1}, \dots]$$

convergent en tout point de $\mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$.
Écrire un algorithme permettant de calculer les réduites de $\tan x$.
Tester la précision obtenue en comparant les valeurs obtenues pour $\tan x$, $x = 0,1 \times k$, $k \in [1, 10]$, $n = 5$ (on donnera l'erreur relative $\dfrac{\tan x - t_5(x)}{\tan x}$ où t_5 désigne la 5-ième réduite.

b) Euler a obtenu pour la fonction exp le développement suivant, valable pour toute valeur réelle ou complexe :

$$\exp x = [0; \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \dots, \frac{x^2}{4n+2}, \dots].$$

Répondre aux mêmes questions qu'au a).