SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SUR LES FRACTIONS CONTINUES

Partie I

(1) On a $a = a_0 b + r_1$ par division euclidienne, soit $\dfrac{a}{b} = a_0 + \dfrac{1}{\frac{b}{r_1}}$ avec $r_1 < b$ et où a_0 peut être nul ou < 0. On divise b par r et, comme dans l'algorithme d'Euclide, on met en évidence une suite (r_k) d'entiers $\geqslant 1$ et strictement décroissante donc cette suite est finie, ce qui assure l'existence de l'écriture.

L'écriture ci-dessus est unique : par récurrence sur n.

On sait que $\dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{\ddots + \dfrac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}}}} < 1$

Pour $n = 1$, c'est immédiat. En effet, si $a_0 + \dfrac{1}{a_1} = a'_0 + \dfrac{1}{a'_1}$ avec $a_1 > 1$ et $a'_1 > 1$ alors $a_0 = [r] = a'_0$ et $a_1 = a'_1$ en découle.

Si $a_0 + \dfrac{1}{r_{n-1}} = a'_0 + \dfrac{1}{r'_{n-1}}$ avec $r_{n-1} > 1$ et $r'_{n-1} > 1$ alors, en prenant les parties entières, on a $a_0 = a'_0$ et $r_{n-1} = r'_{n-1}$ ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence et de conclure.

Remarque : il se peut que r_{n-1} et r'_{n-1} n'ait pas un D.F.C. (développement en fraction continue) de même longueur, la récurrence se fera alors sur la plus grande longueur.

L'algorithme utilisé ici est l'algorithme d'Euclide.

(2) Supposons par récurrence descendante sur k que $\rho_k = \dfrac{\alpha_k}{\beta_k}$ où $\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k & \gamma_k \\ \beta_k & \delta_k \end{pmatrix}$ alors $\dfrac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} = \dfrac{a_{k-1}\alpha_k + \beta_k}{\alpha_k} = a_{k-1} + \dfrac{1}{r_k} = \rho_{k-1}$, on aura bien $r = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

(3) a) On a $\begin{pmatrix} P_{k-1} & R_{k-1} \\ Q_{k-1} & S_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ b_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k-1}a_k + R_{k-1}b_k & P_{k-1} \\ Q_{k-1}a_k + S_{k-1}b_k & Q_{k-1} \end{pmatrix}$.

On en tire : $R_k = P_{k-1}$, $S_k = Q_{k-1}$ donc

$$\begin{cases} P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} \\ Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} \end{cases}$$

b) On a $\dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \dfrac{\begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix}}{Q_k Q_{k-1}} = \dfrac{b_k}{Q_k Q_{k-1}} \begin{vmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} \\ Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix}$ d'où le résultat par une récurrence immédiate.

Partie II

(1) On utilise les relations de récurrence trouvées au I.3.a : $Q_k = u_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$ avec $Q_0 = 1$, $Q_1 = u_1$ donc $Q_k \in \mathbb{N}^*$ et on a vu (toujours au I.3.a) que $R_k = \begin{pmatrix} P_k(u) & P_{k-1}(u) \\ Q_k(u) & Q_{k-1}(u) \end{pmatrix}$.

(2) On a (cf I.3.a) $\begin{vmatrix} P_k(u) & P_{k-1}(u) \\ Q_k(u) & Q_{k-1}(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{k-2}(u) & P_{k-1}(u) \\ Q_{k-2}(u) & Q_{k-1}(u) \end{vmatrix}$ donc par une récurrence immédiate $P_k(u)Q_{k-1}(u) - P_{k-1}(u)Q_k(u) = (-1)^{k-1}$. Comme $u_k \geqslant 1$ alors $Q_k \geqslant Q_{k-1} + Q_{k-2}$ et par une récurrence immédiate sur k, $Q_k(u) > 0$. Donc, pour $k \geqslant 2$ $Q_k > Q_{k-1}$.
Grâce au calcul du I.3.a, on a $r_{2k} - r_{2k+2} = \dfrac{Q_{2k} - Q_{2k+2}}{Q_{2k}Q_{2k+1}Q_{2k+2}}$ i.e. $r_{2k+2} > r_{2k}$ car $Q_{2k} - Q_{2k+2} < 0$, on prouve de même que $r_{2k-1} > r_{2k+1}$. $\lim\limits_{k\to+\infty}(r_{2k} - r_{2k+1}) = 0$ car $Q_k \to +\infty$ (suite d'entiers strictement croissante) donc les suites sont adjacentes.
La suite (r_n) est convergente.

(3) a) Grâce au résultat du I.3.b, on sait que $|r_{k+p}(u) - r_k(u)| < \dfrac{1}{Q_k^2(u)}$ d'où, en prenant la limite quand $p \to +\infty$, on trouve $|r(u) - r_k(u)| \leqslant |r_{k+p}(u) - r_k(u)| < \dfrac{1}{Q_k^2(u)}$.
Supposons que $r = \dfrac{P}{Q}$ et choisissons k suffisamment grand pour que $Q_k \geqslant Q$ alors $\left|\dfrac{P}{Q} - \dfrac{P_k}{Q_k}\right| = \left|\dfrac{PQ_k - P_kQ}{QQ_k}\right| < \dfrac{1}{Q_k^2}$. Nécessairement $PQ_k - P_kQ = 0$ i.e. $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_k}{Q_k}$, la fraction $\dfrac{P_k}{Q_k}$ étant irréductible ($P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k+1}$), on obtient $Q = Q_k$, la suite (Q_k) serait stationnaire, ce qui est impossible.

b) On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{c}{d} - r_{k-1}(u)\right| &< \left|\frac{c}{d} - r(u)\right| + |r(u) - r_{k-1}(u)| \leqslant |r_k(u) - r(u)| + |r(u) - r_{k-1}(u)| \\ &< |r_k(u) - r_{k-1}(u)| \ \text{ car } \operatorname{sgn}(r_k - r) = \operatorname{sgn}(r - r_{k-1}) \\ &< \frac{1}{Q_kQ_{k-1}}.\end{aligned}$$

On multiplie par dQ_{k-1} ce qui donne $|cQ_{k-1}(u) - dP_{k-1}(u)| < \dfrac{d}{Q_k}$. Comme $|cQ_{k-1}(u) - dP_{k-1}(u)| \in \mathbb{N}^*$ (car $\left|\dfrac{c}{d} - r(u)\right| < |r_k(u) - r(u)| < |r_{k-1}(u) - r(u)|$) alors $d > Q_k$.
Conclusion : r_k est la meilleure approximation de $r(u)$ par des fractions dont le dénominateur est inférieur ou égal à Q_k.

(4) a) On remarque que, si $x \in \mathcal{I}$ alors $f(x) > 1$ et $f(x) \in \mathcal{I}$, donc, par une récurrence immédiate $f^k(x) > 1$ et $f^k(x) \in \mathcal{I}$.
Une conséquence directe est que $u_n(x) \in \mathbb{N}^*$ pour $k \geqslant 1$.
Conclusion : $u(x) \in \mathcal{F}$.

b) Comme $f^{k+1} = \dfrac{1}{f^k - u_k}$ alors $f^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -u_k \end{pmatrix} * f^k$ donc $f^k = \begin{pmatrix} u_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * f^{k+1}$ et $x = f^0 = \begin{pmatrix} u_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * f^1$. Par une récurrence immédiate, on a $x = R_k(u) * f^{k+1}$ c.q.f.d.
Autre méthode
\begin{Bourrin}
On fait une preuve par récurrence :

pour $k = 1$, il s'agit de prouver que

$$x = \frac{P_1(u)f^2(x) + P_0(u)}{Q_1(u)f^2(x) + Q_0(u)} = \underbrace{\frac{(u_0(x)u_1(x) + 1)f^2(x) + u_0(x)}{u_1(x)f^2(x) + 1}}_{=y}$$

or, en notations abrégées,

$$\begin{aligned} y &= \frac{(u_0u_1 + 1)\frac{1}{f(x)-u_0} + u_0}{u_1\frac{1}{f(x)-u_1} + 1} = \frac{u_0u_1 + 1 + u_0(f(x) - u_1)}{u_1 + f(x) - u_1} \\ &= u_0 + \frac{1}{f(x)} = [x] + x - [x] = x. \end{aligned}$$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$: on utilise ici les relations $\begin{cases} P_{k+1}(u) & = u_{k+1}(x)P_k(u) + P_{k-1}(u) \\ Q_{k+1}(u) & = u_{k+1}(x)Q_k(u) + Q_{k-1}(u) \end{cases}$

soit, en notations abrégées

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}f^{k+2} + P_k}{Q_{k+1}f^{k+2} + Q_k} &= \frac{(u_{k+1}P_k + P_{k-1})f^{k+2} + P_k}{(u_{k+1}Q_k + Q_{k-1})f^{k+2} + Q_k} \\ &= \frac{u_{k+1}P_k + P_{k-1} + P_k(f^{k+1} - u_{k+1})}{u_{k+1}Q_k + Q_{k-1} + Q_k(f^{k+1} - u_{k+1})} \text{ car } f^{k+2} = \frac{1}{f^{k+1} - u_{k+1}} \\ &= \frac{P_kf^{k+1} + P_{k-1}}{Q_kf^{k+1} + Q_{k-1}} = x \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

\end{Bourrin}
On utilise ensuite le lemme suivant :
Si a, b, c, d, λ sont des réels positifs et si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} < \frac{a+\lambda c}{b+\lambda d} < \frac{c}{d}$ (immédiat en réduisant au même dénominateur). On applique alors ce lemme avec $a = P_{2k}$, $b = Q_{2k}$, $c = P_{2k+1}$, $d = Q_{2k+1}$, $\lambda = f^{2k+2}$.
On peut alors conclure que $x = r(u)$ en passant à la limite.
Remarque : soit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid |\det M| = 1\}$ alors $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ opère sur $\mathcal{I}$ par

$$(M, x) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{I} \mapsto M * x = \frac{ax + b}{cx + d} \in \mathcal{I}$$

avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

c) On a
- $u_0(x + a) = a + u_0(x)$, $u_k(x + a) = u_k(x)$ pour $k \geqslant 1$.
- On a $u_n(f^k(x)) = u_{n+k}(x)$.
- On a

$$-x = -u_0 - \frac{1}{u_1 + x_2} \text{ où } x_2 = \frac{1}{f^2(x)}$$

d'où $-x = -(u_0 + 1) + \dfrac{u_1 + x_2 - 1}{u_1 + x_2}$.

– Si $u_1 = 1$ alors $-x = -(u_0+1) + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x_2}}$ d'où le développement en fraction continue de $-x$:

$$-x = [-(u_0 + 1); \frac{1}{1 + u_2}, \frac{1}{u_3}, \dots, \frac{1}{u_{n+1}}, \dots].$$

– Si $u_1 > 1$ alors $\dfrac{u_1 + x_2}{u_1 - 1 + x_2} = 1 + \dfrac{1}{u_1 - 1 + x_2}$ ce qui permet là aussi le développement en fraction continue de $-x$ dans ce cas :

$$-x = \left[-(u_0+1); \frac{1}{1}, \frac{1}{u_1 - 1}, \frac{1}{u_2}, \dots, \frac{1}{u_{n-1}}, \dots\right].$$

- Si $x > 1$ alors $u_0(1/x) = 0$ et $u_k(1/x) = u_{k-1}(x)$ pour $k \geqslant 1$.
  Si $0 < x < 1$ alors on calculera $[1/x]$ et on utilise le résultat ci-dessus en échangeant les rôles de x et $1/x$ i.e. $u_k(1/x) = u_{k+1}(x)$.
  Si $x < 0$ on utilise le point précédent pour se ramener au cas où $x > 0$.

Partie III

(1) On a $r(u) = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{\ddots\, u_{N-1} + \cfrac{1}{s(u)}}}$ avec $s(u) = u_N + \cfrac{1}{u_{N+1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{s(u)}}}$ donc $s(u) = \dfrac{P_{p-1}s(u) + P_{p-2}}{Q_{p-1}s(u) + Q_{p-2}}$ (cf II.4.b) soit une relation de la forme

$$\gamma s^2(u) + (\delta - \alpha)s(u) - \beta = 0 \tag{1}$$

avec α, β, γ, δ entiers, $\gamma \neq 0$.
On utilise ensuite le lemme suivant : si t est une racine non rationnelle d'une équation algébrique à coefficients dans $\mathbb{Z}$ alors $at + b$, $(a \neq 0)$ et $\dfrac{c}{t}$ $(c \neq 0)$ sont aussi racines d'une équation algébrique à coefficients dans $\mathbb{Z}$:
En effet si $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ alors $\alpha(at+b-b)^2 + \beta a(at+b-b) + a^2\gamma = 0$ et on développe.
De même $\gamma(\frac{c}{t})^2 + \beta c(\frac{c}{t}) + \alpha c^2 = 0$. Et on a $\gamma \neq 0$, $\alpha \neq 0$.
On prouve ensuite que $r(u) = \dfrac{\alpha' s(u) + \beta'}{\gamma' s(u) + \delta'} = A + \dfrac{B}{Cs(u) + D}$ et on utilise le lemme.
Conclusion : $r(u)$ vérifie une équation algébrique du second degré à coefficients entiers.

(2) On utilise donc la relation $x = \dfrac{P_k(u)f^{k+1}(x) + P_{k-1}(u)}{Q_k(u)f^{k+1}(x) + Q_{k-1}(u)}$ alors en reportant dans la relation $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ et en multipliant par $(Q_k f^{k+1} + Q_{k-1})^2$ (en notations simplifiées), on obtient

$$\alpha_k \left(f^{k+1}\right)^2 + \beta_k f^{k+1} + \gamma_k = 0$$

avec $\alpha_k = Q_k^2 T(r_k)$, $\gamma_k = Q_{k-1}^2 T(r_{k-1})$, $\beta_k = Q_k Q_{k-1}(2\alpha r_k r_{k-1} + \beta(r_k + r_{k-1}) + 2\gamma)$ où $r_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ et $T(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

(3) Comme $T(r_k) - T(x) = (r_k - x)(\alpha(r_k + x) + \beta)$ alors

$$|\alpha_k| \leqslant Q_k^2 |r_k - x|(|\alpha|(2x+1) + |\beta|) \leqslant (|\alpha|(2x+1) + |\beta|)$$

car on a vu au II.3.a que $|r_k - x| \leqslant \dfrac{1}{Q_k^2}$. On obtient la même inégalité avec $|\gamma_k|$.
En développant et en simplifiant, on trouve

$$\beta_k^2 - 4\alpha_k\gamma_k = Q_k^2 Q_{k-1}^2 (r_k - r_{k-1})^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) = (\beta^2 - 4\alpha\gamma)$$

car $r_k - r_{k-1} = (-1)^k \dfrac{1}{Q_k Q_{k-1}}$ (relation du I.3.a).

Remarque : en utilisant la relation $f^{k+1} = \dfrac{1}{f^k - u_k}$, on obtient aussi

$$\begin{cases} \gamma_{k+1} & = \alpha_k \\ \beta_{k+1} & = \beta_k + 2\alpha_k u_k \\ \alpha_{k+1} & = \gamma_k + \beta_k u_k + \alpha_k u_k^2 \end{cases}$$

d'où $\Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta$.
On a aussi $|\beta_k|^2 \leqslant |\Delta| + 4(|\alpha|(2x+1) + |\beta|)^2$ donc les suites (α_k), (β_k), (γ_k) sont bornées, les triplets $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ sont en nombre fini. Parmi les valeurs de ces triplets, il y en a un qui est au moins atteint 3 fois (et même plus). Soient k_1, k_2, k_3 les indices correspondant alors les f_{k_i} sont 3 réels qui prennent 2 valeurs, 2 au moins sont égales. Ceci permet alors d'assurer la périodicité de la suite (u_n).

(4) Ici, on note $(\dfrac{1}{u_p}, \dots, \dfrac{1}{u_{p+T-1}})^*$ le développement périodique de $r(u)$.

- Grâce à la relation $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$, on obtient $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; (\dfrac{1}{1})^*]$.
- Comme $\sqrt{5} = 2 + \dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$ alors $\sqrt{5} = [2; (\dfrac{1}{4})^*]$.
- On trouve $\sqrt{41} = [6, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, (\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})^*]$.
- $\sqrt{a^2+1} = [a; (\dfrac{1}{2a})^*]$.
- $\sqrt{a^2+2} = [a; (\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{2a})^*]$.
- Soit $x = \dfrac{1}{2}[a + \sqrt{a^2+4b}]$ alors x est racine de $X^2 - aX - b = 0$ donc $x = [a; \left(\dfrac{b}{a}\right)^*]$ (le développement n'est pas normal).

Partie IV

(1) Quitte à compléter par des coefficients nuls, on peut supposer que $n_1 = n_0 = n$, on va prouver le résultat par récurrence sur n.
Si $n = 0$ OK.
On suppose le résultat vrai à l'ordre n. On écrit

$$f(x) = \frac{1}{\dfrac{c_{00}}{c_{10}} + \left(\dfrac{c_{00} + c_{01}x + \cdots + c_{0n}x^n}{c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1n}x^n} - \dfrac{c_{00}}{c_{10}}\right)} = \frac{c_{10}}{c_{00} + x f_1(x)}$$

où $f_1(x) = \dfrac{c_{20} + c_{21}x + \cdots + c_{2n-1}x^{n-1}}{c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1n}x^n}$ et $c_{2k} = c_{10}c_{0,k+1} - c_{00}c_{1,k+1} = -\begin{vmatrix} c_{00} & c_{0k+1} \\ c_{10} & c_{1k+1} \end{vmatrix}$ pour $k \in [0, n-1]$.
On écrit ensuite $f_1(x) = \dfrac{c_{20}}{c_{10} + x f_2(x)}$ où $f_2(x) = \dfrac{c_{30} + c_{31}x + \cdots + c_{3n-1}x^{n-1}}{c_{20} + c_{21}x + \cdots + c_{2n-1}x^{n-1}}$ et on applique l'hypothèse de récurrence à f_2.

(2) a) Pour l'algorithme, on utilise le programme MAPLE suivant

```
> restart;
Digits := 25
> T:=proc(n,x)
> local j,t;
```

```
> t:=2*n+1;
> for j from 1 to n do
>   t:=2*(n-j)+1-x^2/t;
>   od;
> t:=x/t
> end;

> Delta:=proc(n)
> local k;
> for k from 1 to 10 do
> print (k, Delta=(tan(.1*k)-T(n,.1*k))/tan(.1*k));
> od
> end;

> Delta(5);
```

On obtient alors le tableau suivant

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
%	$7,2.10^{-23}$	$6,1.10^{-19}$	$1,2.10^{-16}$	$5,6.10^{-15}$	$1,1.10^{-13}$	$1,3.10^{-12}$	$1,1.10^{-11}$	$7,7.10^{-11}$	$4,4.10^{-10}$	$2,2.10^{-9}$

b) On reprend les mêmes notations que ci-dessus

```
E:=proc(n,x)
> local j,t;
> t:=4*n+2;
> for j from 1 to n-1 do
>   t:=4*(n-j)+2+x^2/t;
>   od;
> t:=1/(1-2*x/(2+x+x^2/t))
> end;

Deltaexp:=proc(n)
> local k;
> for k from 1 to 10 do
> print (k, Deltaexp=(exp(.1*k)-E(n,.1*k))/exp(.1*k));
> od
> end;

Deltaexp(5);
```

Et on obtient

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
%	$1,7.10^{-25}$	$1,4.10^{-22}$	$2,8.10^{-20}$	$1,2.10^{-18}$	$2,1.10^{-17}$	$2,3.10^{-16}$	$1,7.10^{-15}$	$9,7.10^{-15}$	$4,5.10^{-14}$	$1,8.10^{-13}$