SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

(1) Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ et $I^2 = I \times I$.
(2) $\mathcal{C}(I)$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur I.
On le munit de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

$M(I)$ est l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur $\mathcal{C}(I)$.
On le munit de la norme naturellement associée à celle de $\mathcal{C}(I)$:

$$\forall \mu \in M(I),\ \|\mu\| = \sup_{f \in B_1} |\mu(f)|$$

où B_1 est la boule unité fermée de $\mathcal{C}(I)$.
(3) $\mathcal{C}(I^2)$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur I^2, muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall F \in \mathcal{C}(I^2),\ \|F\| = \sup_{(x,y) \in I^2} |F(x,y)|.$$

$M(I^2)$ est l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur $\mathcal{C}(I^2)$ muni de la norme associée :

$$\forall \lambda \in M(I^2),\ \|\lambda\| = \sup_{F \in B_2} |\lambda(F)|$$

où B_2 est la boule unité fermée de $\mathcal{C}(I^2)$.
(4) Soit $F \in \mathcal{C}(I^2)$, $x \in I$. On note $F(x,.)$ l'application partielle

$$y \in I \mapsto F(x,y),$$

$F(x,.)$ appartient donc à $\mathcal{C}(I)$.
(5) Soit $f \in \mathcal{C}(I)$, $g \in \mathcal{C}(I)$. On désigne par $f \otimes g$ l'élément de $\mathcal{C}(I^2)$ défini par la formule :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ (f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y).$$

(6) On dit qu'une fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J si h est continue et possède un dérivée continue sur J.

Première partie

Pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$, on pose $m(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

I.1. Montrer que l'application ainsi définie de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathbb{R}$ appartient à $M(I)$ et calculer $\|m\|$.

I.2. Soit $a \in I$. Pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$, on pose $\delta_a(f) = f(a)$.
Montrer que δ_a appartient à $M(I)$. Calculer $\|\delta_a\|$.
Calculer $\|\delta_a - \delta_b\|$ si a et b sont deux éléments distincts de I.

I.3. Calculer $\|m - \delta_a\|$.

I.4. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_{\frac{1}{n}}(f) = \delta_0(f)$.
La suite $(\delta_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ a-t-elle une limite dans $M(I)$?
A-t-on une propriété analogue dans $M(I^2)$?

I.5. Soit $\lambda \in M(I^2)$, $\theta \in \mathcal{C}(I)$. On définit deux applications $p_\theta(\lambda)$ et $q_\theta(\lambda)$ de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathbb{R}$ par les formules :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ p_\theta(\lambda)(f) = \lambda(f \otimes \theta)$$
$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ q_\theta(\lambda)(f) = \lambda(\theta \otimes f).$$

Montrer que $p_\theta(\lambda)$ et $q_\theta(\lambda)$ appartiennent à $M(I)$.
Les applications p_θ et q_θ ainsi définies de $M(I^2)$ dans $M(I)$ sont-elles continues ?

Deuxième partie

II.1. Soit $F \in \mathcal{C}(I^2)$, $\nu \in M(I)$. Montrer que l'application F_ν de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I,\ \ F_\nu(x) = \nu[F(x, .)]$$

appartient à $\mathcal{C}(I)$.
Établir l'inégalité $\|F_\nu\| \leqslant \|F\|.\|\nu\|$.

II.2. Soit $\mu \in M(I)$, $\nu \in M(I)$. On définit une application de $\mathcal{C}(I^2)$ dans $\mathbb{R}$, notée $\mu \otimes \nu$, par la formule

$$\forall F \in \mathcal{C}(I^2),\ \ \mu \otimes \nu(F) = \mu(F_\nu).$$

a. Montrer que $\mu \otimes \nu$ appartient à $M(I^2)$.
b. Calculer $\|\mu \otimes \nu\|$ en fonction de $\|\mu\|$ et $\|\nu\|$.
c. Que peut-on dire de l'application $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$?

Dans la suite, $\mathcal{E}$ désigne l'image de $M(I)\times M(I)$ par cette application.

II.3. **a.** Soit $\lambda \in \mathcal{E}$, $\lambda \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathcal{C}(I)$ et $\beta \in \mathcal{C}(I)$ tels que

$$\lambda(\alpha \otimes \beta) = 1.$$

Montrer que pour tout couple (α, β) de $\mathcal{C}(I)\times\mathcal{C}(I)$ vérifiant cette condition,

$$\lambda = p_\beta(\lambda) \otimes q_\alpha(\lambda).$$

b. Soit $\lambda = \delta_0 \otimes \delta_0 + \delta_1 \otimes \delta_1$.
On considère $\theta \in \mathcal{C}(I)$ défini par $\forall x \in I$, $\theta(x) = x$.
Calculer $p_\theta(\lambda)$ et $q_\theta(\lambda)$.
c. $\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M(I^2)$?

Troisième partie

Dans cette partie, φ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1, prenant ses valeurs dans I.

III.1. On pose

$$a_n = \int_0^1 \sqrt{1 + [n\varphi'(nx)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Quelle interprétation géométrique peut-on donner du nombre a_n ?
Montrer que la suite $(\frac{a_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite l.
Exprimer l à l'aide d'une intégrale.

III.2. Pour tout $g \in \mathcal{C}(I)$, on pose

$$\nu(g) = \int_0^1 g[\varphi(x)]|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\nu_n(g) = \frac{1}{n}\int_0^1 g[\varphi(nx)]\sqrt{1 + [n\varphi'(nx)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que ν et ν_n appartiennent à $M(I)$.
Montrer que la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet ν pour limite dans l'espace vectoriel normé $M(I)$.

III.3. Soit $F \in \mathcal{C}(I^2)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que les conditions $n > N$ et $0 \leqslant k < n$, $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, impliquent $|\Delta_{n,k}| < \varepsilon$ où $\Delta_{n,k}$ désigne la différence $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} F[x,\varphi(nx)]\sqrt{1+[n\varphi'(nx)]^2}\,\mathrm{d}x - \nu\left[F\left(\frac{k}{n},.\right)\right]$.
(On pourra poser $\displaystyle\omega_{n,k}(F) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} F(x,\varphi(nx))\sqrt{1+n^2\varphi'(nx)^2}\,\mathrm{d}x$.)

III.4. Pour tout $F \in \mathcal{C}(I^2)$ et tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\lambda_n(F) = \frac{1}{n}\int_0^1 F[x,\varphi(nx)]\sqrt{1+[n\varphi'(nx)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que λ_n appartient à $M(I^2)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in M(I^2)$ tel que, pour tout $F \in \mathcal{C}(I^2)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(F) = \lambda(F).$$

Montrer que λ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ défini dans II.

Quatrième partie

Dans cette partie, φ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, prenant ses valeurs dans I. On se propose d'étudier $\nu \in M(I)$ défini par la formule :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \nu(f) = \int_0^1 f[\varphi(x)]|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

IV.1. Montrer que si φ est monotone, il existe deux réels a_1, a_2 tels que

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 1 \text{ et } \forall f \in \mathcal{C}(I),\ \nu(f) = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

IV.2. On suppose dans cette question que l'équation $\varphi'(x) = 0$ n'a qu'un nombre fini de racines dans I notées $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_p = 1$ (il se peut que 0 et 1 ne soient pas racine). On pose $I_k = [\varphi(x_k), \varphi(x_{k+1}]$ si $\varphi(x_k) < \varphi(x_{k+1})$, $[\varphi(x_{k+1}), \varphi(x_k)]$ sinon.
Trouver une fonction en escalier ψ définie sur I et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \nu(f) = \int_0^1 f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

IV.3. Soit φ_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \sin^2(2\pi x) & \text{pour } \dfrac{1}{2} < x < 1, \\ \varphi_0(x) = 0 & \text{pour } x \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Soit (α_k) une suite *décroissante* de réels telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in]0,1] \text{ et } \lim_{k\to+\infty} \alpha_k = 0.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k}\varphi_0(2^k x).$$

a. Tracer le graphe de φ_2 dans le cas $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ prenant ses valeurs dans I et qu'il existe une fonction en escalier ψ_n définie sur I et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \int_0^1 f[\varphi_n(x)]|\varphi_n'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Expliciter ψ_2 associée à la fonction φ_2 du a.

Exprimer $\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \psi_n(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction des α_k.

c. Montrer que la suite (φ_n) converge uniformément sur I, que sa limite est de classe $\mathcal{C}^1$ et prend ses valeurs dans I. Étudier la convergence de la suite (γ_n).

d. Si φ est la limite de la suite (φ_n), montrer qu'il existe une fonction ψ définie sur I et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon, 1]$ où $\varepsilon \in]0, 1[$ et telle que :

(i) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$ existe,

(ii) $\forall f \in \mathbb{C}(I)$, $\nu(f) = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \psi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$

(noté plus simplement $\nu(f) = \displaystyle\int_0^1 \psi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$).