## SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

- On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues $2\pi$-périodiques à valeurs complexes. Si $f$ appartient à $\mathcal{C}$, on note

$$\|f\| = \sup_{|t|\leqslant\pi} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

et, si $0 < \alpha < \pi$, on pose

$$I_\alpha = [-\alpha, \alpha] \text{ et } \|f\|_{I_\alpha} = \sup_{t\in I_\alpha} |f(t)|.$$

Un sous-espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ est dit associé à $\alpha \in ]0,\pi[$ s'il existe un réel positif $M$ (dépendant de $\mathcal{E}$ et $\alpha$) tel que

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \|f\| \leqslant M\|f\|_{I_\alpha}.$$

- Si $f$ est un élément de $\mathcal{C}$, on note $\widehat{f}$ la fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

et on pose

$$\sigma(f) = \{n \in \mathbb{Z} | \widehat{f}(n) \neq 0\}$$
$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{C} \mid \sigma(f) \text{ fini }\}$$

et, pour toute partie $A$ de $\mathbb{Z}$,

$$\mathcal{C}_A = \{f \in \mathcal{C} | \sigma(f) \subset A\} \text{ et } \mathcal{P}_A = \mathcal{C}_A \cap \mathcal{P}.$$

- Si $f$ et $g$ appartiennent à $\mathcal{C}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Pour tout $k$ de $\mathbb{Z}$, on désigne par $e_k$ la fonction

$$e_k(t) = e^{ikt}.$$

### Partie I

**I.1.** Montrer que, pour $f$ et $g$ dans $\mathcal{C}$,

$$f * g \in \mathcal{C}, \quad f * g = g * f, \quad \widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}.$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f * e_k = \widehat{f}(k)e_k.$$

**I.2.** Caractériser l'ensemble $\mathcal{P}$.

**I.3.** Montrer que

$$\forall A \subset \mathbb{Z}, \quad \overline{\mathcal{P}}_A \subset \mathcal{C}_A$$

(où l'adhérence est relative à la norme $\|.\|$ sur $\mathcal{C}$).

On admettra pour la suite qu'il y a égalité de ces deux ensembles.

**I.4.** Montrer que, si $f$ appartient à $\mathcal{C}$ et $P$ appartient à $\mathcal{P}$,

$$\forall\lambda \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{fP}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\lambda - n)\widehat{P}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\widehat{P}(\lambda - n)$$

où les sommes sont, en fait, des sommes finies.
(On regardera d'abord le cas où $P = e_k$).

*Dans toute la suite du problème, on désigne par* $\Lambda$ *une partie de* $\mathbb{Z}$ *de la forme*

$$\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}^*\} \quad \textit{avec} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geqslant 3.$$

## Partie II

**II.1.** Montrer que, si $m$ appartient à $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$ inférieur ou égal à $m$, $\varepsilon_k$ est un élément de $\mathbb{Z}$ avec $|\varepsilon_k| \leqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k\lambda_k = 0 \Rightarrow \forall k, \varepsilon_k = 0$$

(on montrera tout d'abord que $\varepsilon_m = 0$).
En déduire que, si $m \in \mathbb{N}^*$, un élément $n$ de $\mathbb{Z}$ s'écrit au plus d'une façon sous la forme

$$n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k\lambda_k$$

avec, pour tout $k$, $\varepsilon_k$ dans $\{-1, 0, +1\}$.
On fixe, dans toute la suite de cette partie,

$$m \in \mathbb{N}^*, \quad \delta \in ]0, 1[, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon \in ]0, \pi[$$

et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) = \frac{2}{\delta}\prod_{k=1}^{m}[1 + \delta\cos(\lambda_k t + \varphi_k)].$$

On désigne par $a$ l'unique élément de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t) = a(-t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon], \quad a(t) = \frac{2\pi}{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}t\right), \forall t \in [\varepsilon, \pi], a(t) = 0.$$

**II.2.** **a.** Montrer que $S$ appartient à $\mathcal{P}$ et calculer $\widehat{S}(n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{Z}$. (On distinguera suivant que $n$ est de la forme $\sum\limits_{k=1}^{m} \varepsilon_k\lambda_k$ avec les $\varepsilon_k$ dans $\{-1, 0, +1\}$ ou que $n$ n'est pas de cette forme. Dans le premier cas, on exprimera $\widehat{S}(n)$ en fonction de $\varepsilon_k$).

**b.** Montrer que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant m, \quad \widehat{S}(\lambda_k) = e^{i\varphi_k}, \quad \widehat{S}(-\lambda_k) = e^{-i\varphi_k}$$

et

$$|\widehat{S}(n)| \leqslant \frac{\delta}{2} \text{ si } n \notin \{\pm\lambda_k, 1 \leqslant k \leqslant m\} \cup \{0\}.$$

**c.** Montrer que $\|S\|_1 = \dfrac{2}{\delta}$.

**II.3.** **a.** Calculer $\widehat{a}(n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{Z}$.

**b.** Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{a}(n) = \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

**c.** Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{|n|>N} \widehat{a}(n) \leqslant \frac{8}{N\varepsilon^2}.$$

**II.4.** On pose $T = aS$. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geqslant N+1, \quad |\widehat{S}(\lambda_k) - \widehat{T}(\lambda_k)| \leqslant \frac{\delta\pi}{\varepsilon} + \frac{16}{\varepsilon^2 N\delta}$$

(on pourra d'abord prouver que, pour tout $N$ dans $\mathbb{N}^*$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{Z}, k \geqslant N+1 \text{ et } 0 < |n| \leqslant N \Rightarrow \lambda_k - n > 0 \text{ et } \lambda_k - n \notin \Lambda.)$$

## Partie III

On fixe, dans cette partie, $\varepsilon$ appartenant à $]0, \pi[$.

**III.1.** Montrer qu'il existe un élément $l$ de $\mathbb{N}^*$ et un réel $M$ tels que, pour tout entier $m \geqslant l$ et pour tout $\varphi$ de $\mathbb{R}^m$, il existe un élément $T$ de $\mathcal{C}$ ayant les propriétés suivantes :

$(i)$ La restriction de $T$ à $[-\pi, \pi]$ est nulle hors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$

$(ii)$ $\forall l \leqslant k \leqslant m$, $|\widehat{T}(\lambda_k) - e^{i\varphi_k}| \leqslant \dfrac{1}{2}$

$(iii)$ $\|T\|_1 \leqslant M$.

**III.2.** Soit $m \geqslant l$, on considère un élément $P$ de $\mathcal{P}$ de la forme :

$$P = \sum_{k=l}^{m} \zeta_k e^{-i\varphi_k} e_{\lambda_k}$$

avec $\forall l \leqslant k \leqslant m, \zeta_k \geqslant 0$ et $\varphi_k \in \mathbb{R}$.

**a.** Montrer que

$$\sum_{k=l}^{m} \zeta_k \leqslant M\|P\|_{I_\varepsilon} + \frac{1}{2}\sum_{k=l}^{m} \zeta_k$$

(on pourra considérer $P * T(0)$).

**b.** On pose : $\Lambda' = \{\lambda_k, k \geqslant l\}$.
Montrer que $\mathcal{C}_{\Lambda'}$ est associé à $\varepsilon$.

## Partie IV

**IV.1.** Soit $\varepsilon, \eta > 0$ avec $\varepsilon + \eta < \pi$. On considère une partie $A$ de $\mathbb{Z}$ telle que $\mathcal{C}_A$ soit associé à $\varepsilon$.

**a.** On suppose qu'il existe un élément $g$ de $\mathcal{C}_A$ et un élément $q$ de $\mathbb{Z}$ tels que :

$$\forall t \in I_{\varepsilon+\eta}, g(t) = e_q(t).$$

On pose, pour $|h| \leqslant \eta$,

$$g_h(t) = g(t+h) - e^{iqh} g(t).$$

Montrer que $g_h$ appartient à $\mathcal{C}_A$, puis que $g_h$ est identiquement nulle.
En considérant $\widehat{g}_h$, en déduire que $q$ appartient à $A$.

**b.** On considère maintenant un entier $q$ n'appartenant pas à $A$.
Montrer qu'il existe un réel $L$ (dépendant de $\varepsilon$, $\eta$, $q$) tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_A, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leqslant L\|f + ze_q\|_{I_{\varepsilon+\eta}}$$

(on pourra raisonner par l'absurde).
En déduire que $\mathcal{C}_{A\cup\{q\}}$ est associé à $\varepsilon + \eta$.

**IV.2.** Montrer que, pour tout $\varepsilon$ dans $]0, \pi[$, $\mathcal{C}_\Lambda$ est associé à $\varepsilon$.