SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

PARTIE I 15

I.1. $(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$ de $\mathbb{R}\times[-\pi,+\pi]$ dans $\mathbb{C}$ est continue et bornée donc le théorème de continuité sous le signe $\int$ nous permet d'affirmer que $f * g$ est continue. On vérifie de manière triviale que $f * g$ est également 2π-périodique. 2
Ensuite, en posant $x - t = u$ et en remarquant que, pour une fonction 2π-périodique, on a $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} = \int_0^{2\pi}$, on obtient $f * g = g * f$. 1

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\right]e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right]g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(théorème de Fubini)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)e^{-inu}\,\mathrm{d}u\right]g(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(changement } x = t+u\text{)} \\
&= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).
\end{aligned}$$ 2

La dernière égalité est immédiate.

I.2. On retrouve le cas classique : $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques. En effet si $f \in \mathcal{P}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow \widehat{f}(n) = 0$. On pose alors $g = S_N(f)$, f et g ont mêmes coefficients de Fourier et sont continues donc $f = g = S_N(f)$.
Réciproque immédiate. 4

I.3. $\mathcal{C}_A$ est un fermé, en effet, si (f_p) est une suite de $\mathcal{C}_A$ qui converge uniformément vers f alors, $\forall n \notin A$, $\widehat{f_p}(n) = 0 \Rightarrow \widehat{f}(n) = 0$ et donc $f \in \mathcal{C}_A$.
Vu que $\mathcal{P}_A \subset C_A$, on en déduit que $\overline{\mathcal{P}_A} \subset C_A$. 3
Pour l'autre inclusion, on utilise soit le noyau de Fejer, soit le noyau $K_n(t) = \alpha_n(1+\cos t)^n$ où α_n est choisi pour que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. En fait on peut aussi utiliser une version du théorème de Weierstrass.

I.4. On a $\displaystyle\widehat{fe_k}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{ikt}e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(\lambda - k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(l)\widehat{e}_k(\lambda - l)$.
Par linéarité, comme les sommes sont finies, on obtient bien le résultat

$$\forall \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{fP}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\lambda - n)\widehat{P}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\widehat{P}(\lambda - n)$$ 3

Partie II 35

II.1. On raisonne par récurrence sur m.

- Pour $m = 1$, la propriété est évidente.
- Supposons la vraie jusqu'au rang $m-1$. A l'ordre m, prouvons que $\varepsilon_m = 0$: par l'absurde : si $\varepsilon_m \neq 0$ alors $|\varepsilon_m \lambda_m| \geqslant \lambda_m \geqslant 3\lambda_{m-1}$ or
$$\left|\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k \lambda_k\right| \leqslant 2\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \leqslant 2\lambda_{m-1} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{3^k} < 3\lambda_{m-1},$$
ce qui rend l'égalité $\varepsilon_m \lambda_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k \lambda_k$ impossible.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k = 0$. 4

Supposons maintenant que $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \lambda_k = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon'_k \lambda_k$ (on a pris le même m quitte à prendre des ε_k nuls).

On a alors $\sum_{k=1}^{m} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k)\lambda_k = 0$ avec $|\varepsilon_k - \varepsilon'_k| \leqslant 2$ et en utilisant le résultat précédent on en déduit que $\varepsilon_k = \varepsilon'_k$.

Conclusion : l'écriture $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \lambda_k$ est unique. 1

II.2. a. On a
$$S(t) = \frac{2}{\delta} \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\delta}{2} e^{i(\lambda_k t + \varphi_k)} + \frac{\delta}{2} e^{-i(\lambda_k t + \varphi_k)}\right)$$
$$= \frac{2}{\delta} \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in \{-1,0,1\}^m} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\sum_{l=1}^{m} |\varepsilon_l|} e^{i\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l (\lambda_l t + \varphi_l)}. \qquad 4$$

(On pouvait aussi raisonner par récurrence sur m et utiliser le **I.4**.)

Pour calculer $\widehat{S}(n)$, trois cas se présentent :

- Si $n = 0$ alors $\widehat{S}(0) = \dfrac{2}{\delta}$,
- Si n n'est pas de la forme $\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \lambda_l$ alors $\widehat{S}(n) = 0$. 2
- Si $n = \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \lambda_l$ alors, vu la représentation unique de m, il n'y aura qu'un seul terme de cette forme dans l'écriture ci-dessus et donc
$$\widehat{S}(n) = \frac{2}{\delta} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\sum_{l=1}^{m} |\varepsilon_l|} e^{i\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \varphi_l}. \qquad 3$$

Ceci permet de répondre aux deux questions.

b. $\widehat{S}(\lambda_k) = e^{i\varphi_k}$ et $\widehat{S}(-\lambda_k) = e^{-i\varphi_k}$ car on a dans ce cas $\varepsilon_k = 1$ ou -1, les autres étant nuls. 1

Si $n \notin \{\pm\lambda_k, k \in [1, m]\} \cup \{0\}$, on a deux cas possibles :

- si n ne s'écrit pas sous la forme $\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \lambda_l$ alors $\widehat{S}(n) = 0 \leqslant \dfrac{\delta}{2}$,
- et si $n = \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \lambda_l$, au moins deux ε_l sont non nuls et $\left|\widehat{S}(n)\right| \leqslant \dfrac{2}{\delta}\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^2 = \dfrac{\delta}{2}$. . 1

c. On a $\|S\|_1 = \widehat{S}(0) = \dfrac{2}{\delta}$ car S est positive. 3

II.3. a. Par un simple calcul intégral on a $\begin{cases} \widehat{a}(0) &= 1 \\ \widehat{a}(n) &= \dfrac{2}{\varepsilon^2 n^2}(1-\cos n\varepsilon) \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$ ..... $\boxed{4}$

b. a est continue, de classe C^1 par morceaux, donc a est égale à sa série de Fourier, si on prend la valeur en 0, on a bien la relation demandée :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{a}(n) = \frac{2\pi}{\varepsilon}. \qquad \boxed{2}$$

c. On remarque que $\widehat{a}(-n) = \widehat{a}(n)$ d'où

$$\begin{aligned}\sum_{|n|>N} \widehat{a}(n) &= 2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \widehat{a}(n) \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1-\cos n\varepsilon}{n^2} \leqslant \frac{8}{\varepsilon^2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leqslant \frac{8}{\varepsilon^2 N}. \end{aligned} \qquad \boxed{2}$$

II.4. Montrons que $\lambda_{k+1} > \lambda_k - n > \lambda_{k-1}$ (ce qui prouvera aussi que $\lambda_k - n > 0$).
On a $\lambda_k - n - \lambda_{k-1} \geqslant 3\lambda_{k-1} - n - \lambda_{k-1} = 2\lambda_{k-1} - n \geqslant 2.3^{k-2} - n \geqslant 2.3^{N-1} - N > 0.$ $\boxed{1}$
Ensuite, $\lambda_{k+1} - \lambda_k + n \geqslant 2\lambda_k + n \geqslant 2.3^{k-1} + n \geqslant 2.3^N - N > 0$ donc $\lambda_k - n \notin \Lambda$. .... $\boxed{2}$
On peut alors appliquer le **I.4** car $S \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}\widehat{T}(\lambda_k) = \widehat{aS}(\lambda_k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{a}(n)\widehat{S}(\lambda_k - n) \\ &= \widehat{a}(0)\widehat{S}(\lambda_k) + \sum_{0<|n|\leqslant N} \widehat{a}(n)\widehat{S}(\lambda_k - n) + \sum_{|n|>N} \widehat{a}(n)\widehat{S}(\lambda_k - n),\end{aligned}$$

et comme $\widehat{a}(0) = 1$, il suffit de majorer chacune des deux sommes qui apparaissent ci-dessus :

$$\left| \sum_{0<|n|\leqslant N} \widehat{a}(n)\widehat{S}(\lambda_k - n) \right| \leqslant \frac{\delta}{2} \sum_{0<|n|\leqslant N} \widehat{a}(n) \leqslant \frac{\delta}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{a}(n) = \frac{\pi\delta}{\varepsilon}$$

car les $\widehat{a}(n)$ sont des réels positifs et $\widehat{S}(\lambda_k - n) \leqslant \dfrac{\delta}{2}$ puisque $\lambda_k - n > 0$ et $\lambda_k - n \notin \Lambda$. $\boxed{3}$
Enfin,

$$\left| \sum_{|n|>N} \widehat{a}(n)\widehat{S}(\lambda_k - n) \right| \leqslant \frac{2}{\delta} \sum_{|n|>N} \widehat{a}(n) \leqslant \frac{16}{\varepsilon^2 N\delta} \qquad \boxed{2}$$

car tous les $|\widehat{S}(\lambda_k - n)|$ sont majorés par $\dfrac{2}{\delta}$.
Conclusion : $|\widehat{S}(\lambda_k) - \widehat{T}(\lambda_k)| \leqslant \dfrac{\delta\pi}{\varepsilon} + \dfrac{16}{\varepsilon^2 N\delta}$.

Partie III $\boxed{14}$

III.1. C'est une conséquence du **II.4** :

- on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4\pi} \in]0,1[$, ... $\boxed{1}$
- on prend $l \geqslant \left[\dfrac{64}{\varepsilon^2\delta}\right] + 2$ .... $\boxed{2}$
- et $M = \dfrac{4\pi}{\delta\varepsilon}$. .... $\boxed{1}$

Soit maintenant $m \geqslant l$ et $\varphi \in \mathbb{R}^m$, l'élément T de $\mathcal{C}$ construit au **II** à partir de ces données vérifie bien les conditions (i) et (ii).

Or $\|T\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} |a(t)|.|S(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{2\pi}{\varepsilon}\|S\|_1 = M$ donc T vérifie aussi (iii).

III.2. **a.** D'une part :

$$(P * T)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P(-t)T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} P(-t)T(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$|(P * T)(0)| \leqslant \|P\|_{I_\varepsilon}\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |T(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\|P\|_\varepsilon. \qquad \boxed{2}$$

D'autre part

$$P * T = T * P = \sum_{k=l}^{m} \zeta_k e^{-i\varphi_k} T * e_{\lambda_k} = \sum_{k=l}^{m} \zeta_k e^{-i\varphi_k}\widehat{T}(\lambda_k)e_{\lambda_k}$$

et donc

$$\left|(P * T)(0) - \sum_{k=l}^{m}\zeta_k\right| = \left|\sum_{k=l}^{m}\zeta_k e^{-i\varphi_k}[\widehat{T}(\lambda_k) - e^{i\varphi_k}]\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=l}^{m}\zeta_k. \qquad \boxed{4}$$

Et comme $\left|(P * T)(0) - \sum_{k=l}^{m}\zeta_k\right| \geqslant \sum_{k=l}^{m}\zeta_k - |(P * T)(0)|$ on en déduit que :

$$\sum_{k=l}^{m}\zeta_k \leqslant M\|P\|_{I_\varepsilon} + \frac{1}{2}\sum_{k=l}^{m}\zeta_k \text{ d'où } \sum_{k=l}^{m}\zeta_k \leqslant 2M\|P\|_{I_\varepsilon}.$$

b. Si $P \in \mathcal{P}_{\Lambda'}$ alors P s'écrit sous la forme $P = \sum_{k=l}^{m}\zeta_k e^{-i\varphi_k}e_{\lambda_k}$ avec $\zeta_k \geqslant 0$ pour tout k d'où

$$\|P\| \leqslant \sum_{k=l}^{m}\zeta_k \leqslant 2M\|P\|_{I_\varepsilon}. \qquad \boxed{2}$$

Vu le **I.3**, on sait que $\mathcal{C}_{\Lambda'} = \overline{\mathcal{P}}_{\Lambda'}$ (adhérence au sens de la norme uniforme $\|.\|$), cette inégalité est donc aussi valable pour tous les éléments f de $\mathcal{C}_{\Lambda'}$ (en effet, si (f_n) converge uniformément vers f sur $[-\pi,\pi]$, alors (f_n) va aussi converger uniformément vers f sur I_ε).

On a donc le résultat :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\Lambda'}, \quad \|f\| \leqslant 2M\|f\|_{I_\varepsilon} \qquad \boxed{2}$$

ce qui signifie bien que $\mathcal{C}_{\Lambda'}$ est associé à ε.

Partie IV 21

IV.1. a. Si $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\widehat{g_h}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t+h)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t - e^{iqh}\widehat{g}(k) = (e^{ikh} - e^{iqh})\widehat{g}(k).$$

Comme $g \in \mathcal{C}_A$, si $k \notin A$, $\widehat{g}(k) = 0$ et donc $\widehat{g_h}(k) = 0$, i.e. $g_h \in \mathcal{C}_A$. 2
Ensuite, g_h est évidemment nulle sur I_ε et comme $\mathcal{C}_A$ est associé à ε et que $g_h \in \mathcal{C}_A$ alors $g_h = 0$. 2
La fonction g n'étant pas identiquement nulle, il existe donc $k \in A$ tel que $\widehat{g}(k) \neq 0$ et donc, pour $|h| \leqslant \eta$, $e^{ikh} = e^{iqh}$. En dérivant par rapport à h, on en déduit que $q = k \in A$. 2

b. Par l'absurde :

$$\forall L \in \mathbb{R}, \quad \exists f \in \mathcal{C}_A, \quad \exists z \in \mathbb{C}, \quad |z| > L\|f + ze_q\|_{I_{\varepsilon+\eta}}.$$

Avec $L = n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists f_n \in \mathcal{C}_A, \quad \exists z_n \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{n} > \left\|\frac{1}{z_n}f_n + e_q\right\|_{I_{\varepsilon+\eta}},$$

la suite $g_n = -\dfrac{1}{z_n}f_n$ est alors une suite de Cauchy de $\mathcal{C}_A$ (car $\|g_p - g_q\| \leqslant \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$). $\mathcal{C}$ étant complet, il en est de même de $\mathcal{C}_A$ qui est fermé. Soit g la limite uniforme de (g_n) dans $\mathcal{C}_A$, $\|g_n - e_q\|_{I_\varepsilon}$ converge d'une part vers 0 grâce à l'inégalité ci-dessus et d'autre part vers $\|g - e_q\|_{I_{\varepsilon+\eta}}$.
On a donc $\forall t \in I_{\varepsilon+\eta}$, $g(t) = e_q(t)$ et, vu le a, $q \in A$ ce qui est impossible. On a bien prouvé la propriété

$$\forall f \in \mathcal{C}_A, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leqslant L\|f + ze_q\|_{I_{\varepsilon+\eta}}.$$ 6

Enfin, si $P \in \mathcal{P}_{A\cup\{q\}}$ alors $P = Q + ze_q$ où $Q \in \mathcal{C}_A$.

$$\|P\| \leqslant \|Q\| + |z| \quad \text{et} \quad \|Q\|_{I_\varepsilon} \leqslant \|P\|_{I_\varepsilon} + |z|,$$

d'où

$$\|P\| \leqslant M\|Q\|_{I_\varepsilon} + |z| \leqslant M\|P\| + (M+1)|z| \leqslant M\|P\|_{I_\varepsilon} + (M+1)L\|P\|_{I_{\varepsilon+\eta}}$$

i.e.

$$\|P\| \leqslant M'\|P\|_{I_{\varepsilon+\eta}} \quad \text{où} \quad M' = M + (M+1)L.$$

Vu que $\mathcal{C}_{A\cup\{q\}} = \overline{\mathcal{P}_{A\cup\{q\}}}$, on a la même inégalité pour tous les éléments de $\mathcal{C}_{A\cup\{q\}}$.
Conclusion : $\mathcal{C}_{A\cup\{q\}}$ est associé à $\varepsilon + \eta$. 4

IV.2. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le **III**, il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{C}_{\Lambda'}$ soit associé à $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

- Si $l = 1$, on a $\Lambda' = \Lambda$, la démonstration est terminée.
- Sinon, soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2(l-1)}$, on applique le résultat de la question précédente successivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$ et on prouve ainsi que $\mathcal{C}_\Lambda$ est associé à ε. 5

Remarque : On a ainsi prouvé que si Λ est un ensemble d'entiers relatifs, 3-lacunaires au sens d'Hadamard, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction continue à spectre dans Λ est entièrement connue dès qu'elle est connue sur "l'intervalle de temps" $I_\varepsilon = [-\varepsilon, +\varepsilon]$. Ceci se traduit de manière usuelle par l'obtention d'une inégalité a priori du type :

$$(*) \qquad \|P\| \leqslant M\|P\|_{I_\varepsilon}$$

pour P polynôme trigonométrique à spectre dans Λ.