SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DE L'X MATH 1 2002

Thème : étude de la meilleure approximation sur $]0,1[$ d'une fonction f donnée par une fonction constante c, au sens des moindres carrés dans la première partie, puis au sens de la moindre moyenne dans le reste du problème. On apprend, dans le cas f monotone par morceaux, que c est une constante approchant au mieux f au sens de la moindre moyenne si et seulement si les ensembles $\{t \in]0,1[\text{ tq } f(t) \leqslant c\}$ et $\{t \in]0,1[\text{ tq } f(t) \leqslant c\}$ ont des mesures encadrant $\frac{1}{2}$ (3ème partie), que c est unique si de plus f est continue, et que l'application $f \mapsto c$ est en quelque sorte continue par rapport à f (4ème partie).

Première partie

(1) On utilise l'inégalité $w_n|a_n| \leqslant \dfrac{w_n}{2}(a_n^2+1)$ ce qui permet d'affirmer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n a_n$ est absolument convergente donc converge. On a alors

$$D_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n^2 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

qui est un trinôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$. . . . . $\boxed{3}$

D_a est minimal lorsque $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n a_n$ et il prend la valeur $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n a_n^2 - \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n a_n\right)^2$. $\boxed{3}$

(2) On procède de même, on utilise l'inégalité $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}(f(t)^2+1)$ donc f est intégrable et on a

$$D_f(x) = \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - 2x\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + x^2$$

qui est là aussi un trinôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$. . . . . $\boxed{3}$

D_f est minimal pour $x = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et il prend la valeur $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$. $\boxed{1}$

Deuxième partie

(3) On a $|f(t)-x| \leqslant |f(t)| + |x|$ donc $\Delta(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. . . . . $\boxed{1}$

(4) a) Convexité : soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t, \tau \in [0,1]$. On a, par inégalité triangulaire :

$$|f(t) - \tau x - (1-\tau)y| = |\tau(f(t)-x) + (1-\tau)(f(t)-y)| \leqslant \tau|f(t)-x| + (1-\tau)|f(t)-y|.$$

En intégrant par rapport à t on en déduit $\Delta(\tau x + (1-\tau y) \leqslant \tau\Delta(x) + (1-\tau)\Delta(y)$, ce qui prouve la convexité de Δ. . . . . $\boxed{2}$

Continuité : pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1[$ on a $\big|\,|f(t)-x| - |f(t)-y|\,\big| \leqslant |x-y|$, ce qui montre, en intégrant par rapport à t, que Δ est 1-lipschitzienne et donc continue. On peut aussi remarquer que la convexité sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité, mais ce dernier résultat n'est pas explicitement au programme de MP*. . . . . $\boxed{3}$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1[$ on a $|f(t)-x| \geqslant |x| - |f(t)|$ d'où

$\Delta(x) \geqslant |x| - \displaystyle\int_{t=0}^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. . . . . $\boxed{1}$

(5) Soit $K = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) \leqslant \Delta(0)\}$. K est un fermé de $\mathbb{R}$ par continuité de Δ, non vide par construction, et K est borné d'après la question précédente. Donc K est compact et $\Delta_{|K}$ admet un minimum $V \leqslant \Delta(0)$.

On a alors $\Delta(x) \geqslant V$ pour tout $x \in K$ par définition de V, et aussi $\Delta(x) \geqslant \Delta(0) \geqslant V$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus K$ par définition de K. Ceci prouve que $\min \Delta = V$. 3

Par ailleurs, $M = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) = V\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) \leqslant V\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle (et même un segment par compacité). 2

(6) a) On a $\Delta(x) = \dfrac{1}{2}(|x| + |1-x|)$ d'où

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1, \end{cases} \text{ et } V = \frac{1}{2},\ M = [0,1].$$ 3

b) On a $\displaystyle\int_0^1 |t-x|\,\mathrm{d}t = \frac{x|x| - (x-1)|x-1|}{2}$ d'où

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} - x + x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1, \end{cases} \text{ et } V = \frac{1}{4},\ M = \{\frac{1}{2}\}.$$ 4

Troisième partie

(7) a) Si $h_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in]t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ alors, comme h est monotone sur $]t_i, t_{i+1}[$, $\chi_J(h)$ est une fonction en escalier qui prend les valeurs 0 et 1 (on étudie la position des bornes de J par rapport aux valeurs $h(t_i + 0)$ et $h(t_{i+1} - 0)$). 2

b) Comme le produit $h_i(t).h_j(t)$ est nul, l'un des deux est nul, supposons, par exemple que $h_j(t) = 0$. $(h_i + h_j)(t) = h_i(t)$ et $\chi_J(h_j)(t) = 0$ car $0 \notin J$. On a donc

$$\chi_J(h_i + h_j)(t) = \chi(h_i)(t) = \max(\chi_J(h_i)(t), \chi_J(h_j)(t)),$$

de même si on échange les rôles de h_i et h_j.

Conclusion : $\chi_J(h_i + h_j) = \max(\chi_J(h_i), \chi_J(h_j))$. 2

On a cette même propriété pour une somme finie de fonctions ayant les mêmes propriétés.

c) On écrit alors que $f = \sum\limits_{i=0}^{n-1} h_i + \sum\limits_{i=0}^{n} f(t_i).1_{\{t_i\}}$.

- Si $0 \in J$ et si f s'annule, compte tenu des hypothèses faites sur f, $f^{-1}(0) = K$ est une réunion finie d'intervalles. Pour $t \in K$, on aura $\chi_J(f)(t) = 1$.
- $I \setminus K$ est aussi une réunion finie d'intervalles. On utilise alors le **b)** sur chacun de ces intervalles.

donc χ_J est une fonction en escalier donc continue par morceaux. 4

(8) a) Si J_1, J_2 sont deux intervalles disjoints dont la réunion est un intervalle alors on a $\chi_{J_1 \cup J_2} = \chi_{J_1} + \chi_{J_2}$, d'où l'on déduit $\lambda(J_1 \cup J_2) = \lambda(J_1) + \lambda(J_2)$ par intégration. Le cas général se traite de même ou s'en déduit par récurrence. 2

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment monotone croissante, bornée par $\lambda(\mathbb{R})$ qui vaut 1, donc, d'après le cours, elle converge et sa limite vaut $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$. 1

Ensuite on a

- pour tout $t \in I$, $0 \leqslant \chi_{J_n}(t) \leqslant \chi_J(t)$ et la fonction $t \mapsto \chi_J(t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi_{J_n}(t) = \chi_J(t)$.

Le théorème de convergence dominé s'applique d'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I \chi_{J_n} &= \int_I \lim_{n\to+\infty} \chi_{J_n}\\ &= \int_I \chi_J = \lambda(J).\end{aligned}$$ 4

c) On procède de même avec les fonctions $-\chi_{J_n}$. 2

(9) a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}|f-x| &= (x-f)\chi_{J_1} + (f-x)\chi_{J_2} + (f-x)\chi_{J_3},\\ |f-x-\varepsilon| &= (x+\varepsilon-f)\chi_{J_1} + (x+\varepsilon-f)\chi_{J_2} + (f-x-\varepsilon)\chi_{J_3}\end{aligned}$$ 1

(égalité entre fonctions de $t \in \,]0,1[$). En soustrayant membre à membre puis en intégrant sur $]0,1[$ on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta(x+\varepsilon)-\Delta(x) &= \int_{t=0}^1 \varepsilon\chi_{J_1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^1 (2x-2f(t)+\varepsilon)\chi_{J_2}(t)\,\mathrm{d}t \int_{t=0}^1 (-\varepsilon)\chi_{J_3}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \varepsilon(\lambda(J_1)+\lambda(J_2)-\lambda(J_3)) + 2\int_{t=0}^1 (x-f(t))\chi_{J_2}(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui donne la relation demandée. 4

b) On a $-\varepsilon\chi_{J_2} \leqslant (x-f)\chi_{J_2} \leqslant 0$ (inégalité entre fonctions de t) d'où :

$$\left|\frac{\Delta(x+\varepsilon)-\Delta(x)}{\varepsilon} - \lambda(J_1)+\lambda(J_3)\right| \leqslant \lambda(J_2)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$. Dans cette inégalité, J_1 est fonction de x seul, et J_2, J_3 sont fonction de x et ε. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on considère une suite (ε_n) tendant vers 0^+ en décroissant.

La suite des intervalles J_2 correspondants est décroissante d'intersection vide, et la suite des intervalles J_3 est croissante de réunion $K = \,]x,+\infty[$. D'après les questions **8b** et **8c** on a donc $\lambda(J_2) > 0$ et $\lambda(J_3) > \lambda(K)$. Ceci prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta(x+\varepsilon_n)-\Delta(x)}{\varepsilon_n} = \lambda(]-\infty,x]) - \lambda(]x,+\infty[).$$

Cette limite ayant lieu pour toute suite (ε_n) tendant vers 0^+ en décroissant, on en déduit :

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{\Delta(x+\varepsilon)-\Delta(x)}{\varepsilon} = \lambda(]-\infty,x]) - \lambda(]x,+\infty[),$$

par une adaptation immédiate de la caractérisation séquentielle des limites. Ainsi, Δ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$, et $\Delta'_d(x) = \lambda(]-\infty,x]) - \lambda(]x,+\infty[)$. 6

c) En remplaçant f par $-f$ et x par $-x$ dans le raisonnement précédent, on a de même : Δ est dérivable à gauche sur $\mathbb{R}$, et $\Delta'_g(x) = \lambda(]-\infty,x[) - \lambda([x,+\infty[)$. . 2

d) On a $\Delta'_d(x) - \Delta'_g(x) = 2\lambda(\{x\})$ donc Δ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $f(t) = x$ admet un nombre fini de solutions (sachant que f est monotone par morceaux). Les exemples étudiés au **6** confirment ce résultat. 2

(10) a) D'après **8c**, si $J_n =]-\infty, x+1/n]$, on a $\varphi(x+0) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(J_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda(J_n) = \varphi(x)$ et, de même, d'après **8b**, $\varphi(x-0) = \lambda(]-\infty,x[) = \varphi(x) - \lambda(\{x\})$. 2

b) $\varphi(x) = \lambda(]-\infty,x])$ est une fonction croissante de x, est continue à droite d'après la question précédente, et $\lim_{n\to+\infty} \varphi(-n) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = 1$, donc N_d est un intervalle minoré contenant sa borne inférieure : $N_d = [\alpha,+\infty[$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. . . . 2

De même, $N_g = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda(]-\infty, x[) \leqslant \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda([x, +\infty[) \geqslant \frac{1}{2}\}$ est un intervalle de la forme $]-\infty, \beta]$ pour un certain réel β. . . . . $\boxed{2}$

Donc $N = N_d \cap N_g$ est un intervalle, et s'il est non vide alors $N = [\alpha, \beta]$ est fermé borné.

Remarque : s'il existe x tel que $\beta < x < \alpha$ alors on a $\lambda(]-\infty, x]) < \frac{1}{2} < \lambda(]-\infty, x[)$, ce qui est absurde. Ceci prouve que l'on a en fait $\alpha \leqslant \beta$, d'où $N \neq \emptyset$.

c) On conserve les notations de la réponse précédente. Si $x < \alpha$ alors $\lambda(]-\infty, x]) < \frac{1}{2}$ d'où $\Delta'_d(x) < 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a $\Delta(x+\varepsilon) < \Delta(x)$ d'où $x \notin M$. De même, si $x > \beta$ alors $\Delta'_g(x) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a $\Delta(x - \varepsilon) < \Delta(x)$ d'où $x \notin M$ encore.

Ceci prouve que $M \subset [\alpha, \beta] = N$. . . . . $\boxed{4}$

Lorsque $\alpha = \beta$ on a alors $M = N$ car $M \neq \emptyset$. . . . . $\boxed{1}$

Lorsque $\alpha < \beta$, si $\alpha < x < y < \beta$ alors on a $\frac{1}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(y-0) \leqslant \frac{1}{2}$, d'où $\varphi(x) = \frac{1}{2}$. Ainsi, φ est constante sur $]\alpha, \beta[$ et donc $\varphi(x-0) = \varphi(x) = \frac{1}{2}$ (ceci répond à la dernière partie de la question). . . . . $\boxed{2}$

De plus, $\Delta'_g(x) = \Delta'_d(x) = 0$: Δ est constante sur $[\alpha, \beta]$. La valeur constante en question est V puisque $M \subset [\alpha, \beta]$, d'où $M = [\alpha, \beta] = N$ dans ce cas encore. . . . $\boxed{5}$

Quatrième partie

(11) a) Si $x \notin f(I)$ alors, f étant continue, on a $f(I) \subset]-\infty, x[$ ou $f(I) \subset]x, +\infty[$. Dans le premier cas, on a $\Delta'_g(x) = 1$ d'où $\Delta(x - \varepsilon) < \Delta(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, donc $x \notin M_f$.

Dans le second cas on a $\Delta'_d(x) = -1$ et on conclut de même. $\boxed{4}$

b) Si M_f n'est pas réduit à un point, alors c'est un intervalle non trivial $[\alpha, \beta]$ et φ est constante égale à $\frac{1}{2}$ sur cet intervalle. . . . . $\boxed{1}$

$f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs vaut $\frac{1}{2}$, et ces intervalles sont des fermés relatifs de $]0,1[$ par continuité de f.

De même, $f^{-1}(]-\infty, \beta])$ est une réunion finie d'intervalles fermés relatifs de $]0,1[$, qui contiennent les intervalles constituant $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$, et dont la somme des longueurs vaut aussi $\frac{1}{2}$. Ceci implique $f^{-1}(]-\infty, \alpha]) = f^{-1}(]-\infty, \beta])$ donc les réels $x \in]\alpha, \beta[$ n'ont pas d'antécédents par f, ce qui contredit l'inclusion $M_f \subset f(I)$. $\boxed{8}$

c) On a $V_f = \min \Delta \leqslant \Delta(0) = \displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t)| \, \mathrm{d}t$. . . . . $\boxed{1}$

Soit $L = \displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t)| \, \mathrm{d}t$: on a : $\displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t) - x| \, \mathrm{d}t \geqslant \int_{t=0}^{1} (|x| - |f(t)|) \, \mathrm{d}t > L \geqslant V_f$ pour $|x| > 2L$, donc $x \neq m_f$. Par contraposée, $m_f \leqslant 2 \displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t)| \, \mathrm{d}t$. . . . . $\boxed{3}$

(12) D'après la question précédente, $|m_n| \leqslant 2\|g_n\|_1 \to 2\|g\|_1$ quand $n \to +\infty$ donc la suite (m_n) est bornée, et elle admet des valeurs d'adhérence. . . . . $\boxed{1}$

Soit $m = \lim\limits_{k \to \infty} m_{n_k}$ l'une de ces valeurs d'adhérence. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|g - x\|_1 - \|g - m_{n_k}\|_1 &\geqslant (\|g_{n_k} - x\|_1 - \|g - g_{n_k}\|_1) - (\|g_{n_k} - m_{n_k}\|_1 + \|g - g_{n_k}\|_1) \\ &\geqslant -2\,\|g - g_{n_k}\|_1. \end{aligned}$$

En faisant tendre k vers l'infini on obtient $\|g - x\|_1 \geqslant \|g - m\|_1$ ce qui prouve que $m \in M_g$. . . . . $\boxed{3}$