SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Les deux premières parties sont indépendantes. La partie III utilise des résultats établis dans la deuxième partie ; cependant on pourra l'aborder sans les avoir complètement démontrés. Dans les questions III.4 et III.5, on utilise la notion de stabilité définie dans la partie I.

Première partie

On dit qu'une série à termes complexes $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ est *absolument convergente* si les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$ sont convergentes. On appelle alors *somme de la série* le nombre $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

On appelle *série trigonométrique* toute série de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{inx}$, où les c_n sont des nombres complexes. Dans toute la suite, la même lettre sera reprise pour désigner une série trigonométrique donnée, sa somme et ses coefficients : ainsi c désigne la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{inx}$, et sa somme est $c(x)$.

On désigne par E l'espace vectoriel des séries trigonométriques absolument convergentes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.1. **a.** Montrer que si c appartient à E, alors $c(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π.

b. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $c_p = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} c(x) \,\mathrm{e}^{-ipx} \,\mathrm{d}x$.

I.2. **a.** Montrer que l'on définit une norme sur E en posant $\|c\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$.

b. Montrer que pour tout $c \in E$, on a $\sup_{p\in\mathbb{Z}} |c_p| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |c(x)| \leqslant \|c\|$.

Dans toute la suite, a désigne un polynôme trigonométrique : $a(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \,\mathrm{e}^{inx}$, les a_n étant des nombres complexes : c'est évidemment un élément de E.

I.3. **a.** Montrer que si c appartient à E, alors il existe un unique $d \in E$ tel que $d(x) = a(x)c(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de plus $\|d\| \leqslant \|a\|.\|c\|$.

b. Montrer que l'application A qui à tout $c \in E$ associe $Ac \in E$ tel que $(Ac)(x) = a(x)c(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est linéaire continue de E dans E, et calculer sa norme.

I.4. **a.** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, il existe des nombres complexes $a_{k,n}$ tels que la puissance $k^{\text{ième}}$ de $a(x)$ s'écrive :

$$a^k(x) = \sum_{n=-kN}^{kN} a_{k,n} \,\mathrm{e}^{inx} .$$

b. Prouver que $\|a^k\| \leqslant (2kN+1) \sup_{x\in\mathbb{R}} |a^k(x)|$.

En déduire que la limite de $\|a^k\|^{1/k}$ quand k tend vers $+\infty$ existe et est égale à $\sup_{x\in\mathbb{R}} |a(x)|$.

I.5. On revient à l'application linéaire continue A de E dans E définie au **3.b**.
On dit que A est *stable* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $c \in E$ on ait $\|A^k c\| \leqslant C\|c\|$, où $A^k = A \circ A \circ \ldots \circ A$ (k fois).

a. Montrer que si $a(x) = a_p\,\mathrm{e}^{ipx}$ (un seul terme non nul) avec $|a_p| = 1$ alors A est stable.
b. Montrer que si $|a(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors A est stable.
c. Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|a(x)| > 1$ alors A n'est pas stable.

Deuxième partie

Dans cette partie, on démontre quelques résultats qui seront utilisés dans la troisième partie.

II.1. Soit $[r, s]$ un segment de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[r, s]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $|f'(t)| \geqslant K$ pour tout $t \in [r, s]$, et que de plus $f''(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [r, s]$.
En intégrant par parties l'intégrale $\displaystyle\int_r^s \frac{1}{f'(t)} \cos f(t).f'(t)\,\mathrm{d}t$, établir que

$$\left|\int_r^s \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{4}{K}.$$

II.2. Soit $[u, v]$ un segment de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[u, v]$ à valeurs réelles. On suppose cette fois qu'il existe $M > 0$ tel que $f''(t) \geqslant M$ pour tout $t \in [u, v]$.

a. On suppose $f'(u) \geqslant 0$. Montrer que pour tout $t \in [u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v]$ on a $|f'(t)| \geqslant 2\sqrt{M}$.
En déduire que :

$$\left|\int_u^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

b. Traiter de même le cas où $f'(v) \leqslant 0$.
c. On suppose $f'(u)f'(v) < 0$.
Montrer qu'il existe $w \in]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$. En déduire que

$$\left|\int_u^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

II.3. Soient β un nombre réel, q un polynôme à coefficients réels tel que $q(0) \neq 0$ et l un entier $\geqslant 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi_{k,\beta}(x) = \int_0^x \cos(\beta t + k t^l q(t))\,\mathrm{d}t.$$

On note $\rho = \dfrac{l(l-1)}{2}|q(0)|$.

a. Prouver qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \delta]$ on a

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t^l q(t))\right| \geqslant \rho t^{l-2}.$$

b. On suppose $k > \dfrac{1}{\delta^l}$. Établir que pour tout $x \in [\frac{1}{\sqrt[l]{k}}, \delta]$ on a :

$$\left|\int_{1/\sqrt[l]{k}}^x \cos(\beta t + k t^l q(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{\rho}\sqrt[l]{k}}.$$

c. En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de k et de β telle que, pour tout $x \in [0, \delta]$, on a $|\varphi_{k,\beta}(x)| \leqslant \dfrac{C_1}{\sqrt[l]{k}}$.

Avec les notations de cette question, on pose

$$\psi_{k,\beta}(x) = \int_0^x \sin(\beta t + kt^l q(t))\,\mathrm{d}t \ :$$

on *admettra* qu'il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de k et de β telle que pour tout $x \in [0, \delta]$ on a $|\psi_{k,\beta}(x)| \leqslant \dfrac{C_2}{\sqrt[l]{k}}$.

II.4. Soit h une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$, à valeurs réelles, telle que $h(0) = 1$ et $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. On suppose qu'il existe un réel $\mu > 0$, un entier pair $m > 0$ et une fonction $\varepsilon(x)$ définie au voisinage de 0, tendant vers 0 si x tend vers 0, tels que, au voisinage de 0, on ait

$$h(x) = \mathrm{e}^{-\mu x^m(1+\varepsilon(x))}\,.$$

a. Établir la convergence de l'intégrale

$$J(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\nu y^m}\,\mathrm{d}y, \quad (\nu > 0).$$

b. Montrer que $J(\nu)$ est une fonction continue de ν sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que, pour tout $\sigma > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{e}^{-k\mu x^m(1+\sigma)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\eta}^{\eta} h(x)^k\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{e}^{-k\mu x^m(1-\sigma)}\,\mathrm{d}x.$$

d. Grâce au changement de variable $y = x\sqrt[m]{k}$, en déduire que

$$J(\mu) = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[m]{k} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)^k\,\mathrm{d}x.$$

Troisième partie

Soit $a(x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} a_n\,\mathrm{e}^{inx}$ un polynôme trigonométrique. On suppose que $a(0) = 1$ et que $|a(x)| < 1$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

Dans toute cette partie, on suppose que $a(x)$ possède la propriété suivante :

il existe un réel α, deux entiers l et m tels que $1 < l < m$, m étant pair, un polynôme $q(x)$ à coefficients réels tel que $q(0) \neq 0$, un réel γ strictement positif et une fonction $\varepsilon(x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0, vérifiant $\varepsilon(0) = 0$, tels que, au voisinage de 0, on ait

$$a(x) = \exp\big(i\alpha x + ix^l q(x) - \gamma x^m(1+\varepsilon(x))\big)\,.$$

On se propose de démontrer que l'application A définie au **I** n'est pas stable.

III.1. a. On pose $b(x) = \mathrm{e}^{-i\alpha x - ix^l q(x)}\,a(x)$.

Soit $\eta \in]0, \pi[$ tel que $|\varepsilon(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ si $|x| \leqslant \eta$. En considérant successivement les intervalles $[-\eta, \eta]$, $[-\pi, -\eta]$ et $[\eta, \pi]$, montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on ait $|b(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x^m}$.

b. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon_1(x)$ définie et continue au voisinage de 0, telle que $\varepsilon_1(0) = 0$ et telle que, au voisinage de 0, on ait

$$b'(x) = -m\gamma x^{m-1}(1 + \varepsilon_1(x)).$$

En déduire qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on ait $|b'(x)| \leqslant C_3|x|^{m-1}$.

III.2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties et des résultats du **II.3.c** et du **III.1**, montrer qu'il existe $\delta \in]0, \pi[$ et une constante $C_4 > 0$ indépendante de n et k telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \varphi'_{k,\alpha k-n}(x)(b(x))^k \,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{C_4}{\sqrt[l]{k}},$$

où la fonction $\varphi'_{k,\alpha k-n}$ a été définie au **II**.

b. Établir directement le même résultat pour

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} \varphi'_{k,\alpha k-n}(x)(b(x))^k \,\mathrm{d}x \right|.$$

c. En déduire qu'il existe une constante $C_5 > 0$ indépendante de n et k telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \in [-kN, kN]$, on ait $|a_{k,n}| \leqslant \dfrac{C_5}{\sqrt[l]{k}}$.

III.3. **a.** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{n=-kN}^{kN} |a_{n,k}|^2 \leqslant \left(\max_{-kN \leqslant n \leqslant kN} |a_{k,n}| \right) \cdot \sum_{n=-kN}^{kN} |a_{k,n}|.$$

b. En déduire qu'il existe une constante $C_6 > 0$ indépendante de k telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on ait

$$\|a^k\| \geqslant C_6 k^{\frac{1}{l} - \frac{1}{m}}.$$

c. Montrer que l'opérateur A défini au **I** n'est pas stable.

III.4. Soit ξ une constante réelle telle que $|\xi| < 1$. On pose

$$a(x) = \xi^2 \cos x - i\xi \sin x + 1 - \xi^2.$$

Montrer que l'application A associée à $a(x)$ définie au **I** n'est pas stable.

On admettra que l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $Z = \mathrm{e}^z - 1$ admet une application réciproque L, définie de de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on ait

$$L(Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \ldots + (-1)^{p-1} \frac{Z^p}{p}(1 + \varepsilon(Z))$$

où $\varepsilon(Z)$ tend vers 0 avec Z.