SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Première partie

I.1. **a.** D'une part la série $c_+(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{inx}$ est normalement convergente donc sa somme est continue sur $\mathbb{R}$, de même pour $c_-(x) = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n\,\mathrm{e}^{inx}$.
D'autre part, les sommes partielles de chacune de ces séries sont 2π-périodiques, il en est de même pour leurs sommes ; donc $c(x)$ est bien 2π-périodique. . . . . $\boxed{2}$

b. On a $c(x) = c_+(x) + c_-(x)$, chacune de ces séries convergeant normalement, on peut intervertir $\displaystyle\int$ et $\sum$ d'où

$$\int_{-\pi}^{+\pi} c(x)\,\mathrm{e}^{-ipx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)x}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-i(n+p)x}\,\mathrm{d}x.$$

Toutes ces intégrales sont nulles sauf celle où $n = p$ (si $p \geqslant 0$), $n = -p$ (si $p < 0$) et dans ce cas, on a bien $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} c(x)\,\mathrm{e}^{-ipx}\,\mathrm{d}x = 2\pi c_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. . . . . $\boxed{2}$

I.2. **a.** Vérifions qu'on a bien une norme :
- $\|c\| \geqslant 0$,
- $\|c\| = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, |c_n| = 0 \Rightarrow c = 0$.
- Comme $|\lambda c_n| = |\lambda||c_n|$ on vérifie que $\|\lambda c\| = |\lambda|\|c\|$;
- on démontre de même que $\|c + d\| \leqslant \|c\| + \|d\|$. . . . . $\boxed{2}$

b. $\displaystyle |c_p| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} c(x)\,\mathrm{e}^{-ipx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |c(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |c(x)|$. . . . . $\boxed{2}$

$|c(x)| \leqslant |c_+(x)| + |c_-(x)|$ or $|c_+(x)| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n\,\mathrm{e}^{inx}| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|$ et avec la même majoration pour $c_-(x)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}\ : |c(x)| \leqslant \|c\|$ d'où le résultat. . . . . $\boxed{2}$

I.3. **a.** D'une part, on utilise la linéarité $d_n(x) = a_n\,\mathrm{e}^{inx}\,c(x) \in E$ donc $d(x) = \sum\limits_{n=-N}^{+N} d_n(x) \in E$ car E est un $\mathbb{C}$-e.v..
D'autre part : $\|d_n\| \leqslant |a_n|.\|c\| \Rightarrow \|d\| \leqslant \sum\limits_{n=-N}^{+N} |a_n|.\|c\| = \|a\|.\|c\|$ (on peut aussi utiliser le produit de convolution). . . . . $\boxed{3}$

b. A est évidemment linéaire, or $\|Ac\| \leqslant \|a\|.\|c\|$ donc A est continue et $\|A\| \leqslant \|a\|$. . $\boxed{1}$
Si on choisit $c(x) = 1, Ac(x) = a(x)$ donc $\|Ac(x)\| = \|a\|.\|c\| = 1$ permet de prouver que $\|A\| = \|a\|$. . . . . $\boxed{2}$

I.4. **a.** On procéde par récurrence sur k :
$k = 1$: immédiat.

Supposons que $a^k(x) = \sum\limits_{n=-kN}^{+kN} a_{k,n}\,\mathrm{e}^{inx}$ alors

$$a^{k+1}(x) = \left(\sum_{p=-N}^{+N} a_p\,\mathrm{e}^{ipx}\right)\left(\sum_{n=-kN}^{+kN} a_{k,n}\,\mathrm{e}^{inx}\right)$$

$$= \sum_{p,n} a_p a_{k,n}\,\mathrm{e}^{i(p+n)x} = \sum_{q=-(k+1)N}^{+(k+1)N} a_{k+1,q}\,\mathrm{e}^{iqx}$$

où $a_{k+1,q} = \sum\limits_{p+n=q} a_p a_{k,n}$. .... $\boxed{3}$

b. Il suffit en fait de montrer que $|a_{k,n}| \leqslant \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a^k(x)|$ pour tout n. Or

$$|a_{k,n}| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{+\pi} a^k(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |a^k(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |a^k(x)|.$$

Donc $\|a^k\| \leqslant \sum\limits_{n=-kN}^{+kN} \sup_{x\in\mathbb{R}} |a^k(x)| = (2kN+1)\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a^k(x)|$ c.q.f.d. .... $\boxed{3}$

On sait (**2.b**) que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a^k(x)| \leqslant \|a^k\|$, or $\left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a^k(x)|\right)^{1/k} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a(x)|$ donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a(x)| \leqslant \|a^k\| \leqslant (2kN+1)^{1/k} \sup_{x\in\mathbb{R}} |a(x)|$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} (2kN+1)^{1/k} = 1$ on peut affirmer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|a^k\|^{1/k} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a(x)|$. .. $\boxed{4}$

I.5. a. On a : $A^k c(x) = a(x)^k c(x) = a_p^k\,\mathrm{e}^{ipkx}\,c(x)$ et $|a_p^k\,\mathrm{e}^{ipkx}\,c(x)| = |c(x)|$ par conséquent $\|A^k c(x)\| = \|c(x)\|$: $C = 1$. .... $\boxed{1}$

b. Si $\forall x \in \mathbb{R}$: $|a(x)| < 1$ alors montrons que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a(x)| < 1$. En effet $a(x)$ est continue, 2π-périodique donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a(x)| = \sup_{x\in[-\pi,+\pi]} |a(x)| = |a(x_0)| < 1$$

pour un $x_0 \in [-\pi,+\pi]$.
Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \|a^k\|^{1/k} < 1$ alors $\|a^k\|$ tend vers 0, elle est donc bornée (par C) et donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, \|A^k c\| \leqslant \|a^k\|.\|c\| \leqslant C\|c\|$. .... $\boxed{3}$

c. Si $\exists x \in \mathbb{R}, |a(x)| > 1$ alors $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a(x)| > 1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \|a^k\|^{1/k} > 1$ i.e.

$$\exists \alpha > 1, \exists C \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant C, \|a^k\|^{1/k} \geqslant \alpha$$

i.e. $\|a^k\| \geqslant \alpha^k$ et $\|a^k\| \to +\infty$ quand $k \to +\infty$. Vu que $\|A^k\| = \|a^k\|$ on ne peut avoir $\|A^k\| \leqslant C$ pour tout k. c.q.f.d. .... $\boxed{2}$

Deuxième partie

II.1. On peut écrire $\displaystyle\int_r^s \cos f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin f(s)}{f'(s)} - \frac{\sin f(r)}{f'(r)} + \int_r^s \sin f(t)\frac{f''(t)}{f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$. On majore $|\sin f(t)|$ par 1, $\dfrac{1}{|f'(t)|}$ par $\dfrac{1}{K}$ et on intègre $\dfrac{f''(t)}{f'(t)^2}$ d'où

$$\left|\int_r^s \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{K} + \int_r^s \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{K} + \left[\frac{1}{|f'(r)|} + \frac{1}{|f'(s)|}\right] \leqslant \frac{4}{K}. \qquad \boxed{3}$$

II.2. **a.** On a : $f'(t) = f'(u) + \displaystyle\int_u^t f''(w)\,\mathrm{d}w \geqslant M(t-u)$ car $f'(u) \geqslant 0$ et $f''(w) \geqslant M$. Si $t \geqslant u + \dfrac{2}{\sqrt{M}}$ alors $f'(t) \geqslant 2\sqrt{M}$. .... $\boxed{1}$

Ensuite, en partageant l'intégrale en 2

$$\left|\int_u^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_u^{u+2/\sqrt{M}} \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{u+2/\sqrt{M}}^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

on majore la première intégrale par $\dfrac{2}{\sqrt{M}}$ car $|\cos f(t)| \leqslant 1$ et on utilise le résultat du 1 pour majorer le deuxième en prenant $K = 2\sqrt{M}$ d'où $\left|\displaystyle\int_u^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{M}}$ c.q.f.d. (si $v \leqslant u + \dfrac{2}{\sqrt{M}}$ le résultat est immédiat). .... $\boxed{3}$

b. On pose $g(t) = f(-t), g'(-v) \geqslant 0$. Le a) nous permet d'écrire $\left|\displaystyle\int_{-v}^{-u} \cos g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{M}}$ et on pose $w = -t$ pour obtenir : $\left|\displaystyle\int_u^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{M}}$. .... $\boxed{2}$

c. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure. .... $\boxed{0}$

Puis $\left|\displaystyle\int_u^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_u^w \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\displaystyle\int_w^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right|$: on majore la première intégrale par $\dfrac{4}{\sqrt{M}}$ grâce au a) et la deuxième par $\dfrac{4}{\sqrt{M}}$ grâce au b) et donc

$$\left|\int_u^v \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{M}}.$$ $\boxed{2}$

II.3. **a.** Un simple calcul nous donne

$$\left[t^l q(t)\right]'' = t^{l-2}\left[l(l-1)q(t) + 2lq't) + t^2 q''(t)\right] = t^{l-2}\psi(t).$$

$|\psi(0)| = 2\rho$ donc, comme $\psi(t)$ est continue en 0, $\exists\delta > 0, \forall t \in [0,\delta], |\psi(t) \geqslant \rho$, on peut conclure alors que $\left|\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t^l q(t))\right| \geqslant \rho t^{l-2}$. .... $\boxed{2}$

b. On utilise les résultats de la question **2**.

- Si $q(0) > 0$ on pose $f(t) = \beta t + kt^l q(t)$; $f''(t) = k\left[t^l q(t)\right]''$. Si $t \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$: $f''(t) \geqslant \dfrac{k\rho}{k^{\frac{\rho-2}{\rho}}} = \rho k^{\frac{2}{\rho}} = M$. Pour obtenir la majoration demandée, on utilise le **2.c** (ou le a,b selon les signes de $f'(1/\sqrt[l]{k})$ et $f'(x)$).
- Si $q(0) < 0$ on prend $f(t) = -(\beta t + kt^l q(t))$ et on refait la même chose. .... $\boxed{3}$

c.
- Si $k > \dfrac{1}{\delta^l}$ alors,
  – pour $x > \dfrac{1}{k^{1/l}}$,

$$\left|\int_0^x \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^{1/k^{1/l}} \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{1/k^{1/l}}^x \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

En majorant $|\cos f(t)|$ par 1 dans la première intégrale, on trouvera :

$$\left|\int_0^x \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(1+\frac{8}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{1}{k^{1/l}}.$$

– Si $x \leqslant \dfrac{1}{k^{1/l}}$, une simple majoration de $\cos f(t)$ par 1 suffit.

- Si $k \leqslant \dfrac{1}{\delta^l}$ alors $\delta < \dfrac{1}{k^{1/l}}$ donc $\left|\displaystyle\int_0^x \cos f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x \leqslant \delta < \dfrac{1}{k^{1/l}}$.

Conclusion : on prendra $C_1 = 1 + \dfrac{8}{\sqrt{\rho}}$. .... $\boxed{4}$

II.4. a. $\mathrm{e}^{-\nu y^m}$ est une fonction paire, il suffit donc de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\nu y^m}\,\mathrm{d}y$ converge. Or $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} y^m\,\mathrm{e}^{-\nu y^m} = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-\nu y^m} = o(1/y^m)$ comme $m \geqslant 2$ $J(\nu)$ converge. .... $\boxed{1}$

b. C'est une application du théorème de continuité sous le signe intégral. Soit $g(\nu,y) = \mathrm{e}^{-\nu y^m}$.

- $(\nu,y) \mapsto g(\nu,y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Pour tout $a>0$ et $\nu \in [a,+\infty[$, $0 \leqslant g(\nu,y) \leqslant g(a,y)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$J(\nu)$ est donc continue sur tout intervalle $[a,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$. .... $\boxed{3}$

c. Comme $\varepsilon(x) \to 0$ en 0, on sait que

$$\forall\sigma>0, \exists\eta>0, \forall x\in\mathbb{R}, |x|<\eta \Rightarrow |\varepsilon(x)|<\sigma$$

ce qui donne $\sigma - \varepsilon(x) > 0$ et $\sigma + \varepsilon(x) > 0$. Donc

$$h(x)/\,\mathrm{e}^{-\mu x^m(1+\sigma)} = \mathrm{e}^{\mu x^m(\sigma-\varepsilon(x))} \geqslant 1 \text{ soit } h(x) \geqslant \mathrm{e}^{-\mu x^m(1+\sigma)}$$

on intégre alors de $-\eta$ à $+\eta$ pour trouver la première inégalité.
On fait de même avec $1-\sigma$. .... $\boxed{3}$

d. On découpe l'intégrale en 3 :

$$\sqrt[m]{k}\int_{-\pi}^{+\pi} h(x)^k\,\mathrm{d}x = \underbrace{\sqrt[m]{k}\int_{-\pi}^{-\eta} h(x)^k\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + \underbrace{\sqrt[m]{k}\int_{-\eta}^{+\eta} h(x)^k\,\mathrm{d}x}_{=I_2} + \underbrace{\sqrt[m]{k}\int_{\pi}^{+\eta} h(x)^k\,\mathrm{d}x}_{=I_3}.$$

- Intéressons nous à I_2 :
  Comme $J(\nu)$ est continue, choisissons σ pour que $|J(\mu(1-\sigma)) - J(\mu)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.
  η étant fixé (par σ), prenons k_0 pour que

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow \left|\int_{-\eta\sqrt[m]{k}}^{+\eta\sqrt[m]{k}} \mathrm{e}^{-\mu(1+\sigma)y^m}\,\mathrm{d}y - J(\mu(1+\sigma))\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

  (de même avec $1-\sigma$). On remarque que (!...) :

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{k}\int_{-\eta}^{+\eta} h(x)^k\,\mathrm{d}x &\geqslant \sqrt[m]{k}\int_{-\eta}^{+\eta} \mathrm{e}^{-k\mu x^m(1+\sigma)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\eta\sqrt[m]{k}}^{+\eta\sqrt[m]{k}} \mathrm{e}^{-\mu(1+\sigma)y^m}\,\mathrm{d}y \geqslant J(\mu(1+\sigma)) - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant J(\mu) - \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

  La même intégrale est majorée par $J(\mu) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
  On a donc $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant I_2 - J(\mu) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

- Sur $[-\pi,-\eta]\cup[+\eta,+\pi]$, $|h(x)|$ est une fonction continue strictement inférieure à 1, elle atteint sa borne supérieure $a<1$ donc $\left|\int_{-\pi}^{-\eta} h(x)^k\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \pi a^k$ et $\left|\int_{+\eta}^{+\pi} h(x)^k\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \pi a^k$.
  Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} 2\sqrt[m]{k}a^k\pi = 0$ il existe k_1 tel que : $k\geqslant k_1 \Rightarrow 2\sqrt[m]{k}\pi a^k < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
  On obtient ici $|I_1|+|I_3| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

En choisissant $K=\max(k_0,k_1)$ on aura, pour $k\geqslant K$, $\left|\sqrt[m]{k}\int_{-\pi}^{+\pi} h(x)^k\,\mathrm{d}x - J(\mu)\right| < \varepsilon$ soit $J(\mu) = \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[m]{k}\int_{-\pi}^{+\pi} h(x)^k\,\mathrm{d}x$. . . . . $\boxed{8}$

Troisième partie

III.1. a. On a $b(x) = \mathrm{e}^{-\gamma x^m(1+\varepsilon(x))}$.

- Si $x\in[-\eta,+\eta]$ alors $|b(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma x^m}$. . . . . $\boxed{1}$
- Pour $|x|\geqslant\eta, |b(x)|<1$ donc $\exists a<1, |b(x)|\leqslant a<1$. Si on pose $\lambda_1 = \dfrac{\ln(\frac{1}{a})}{\pi^m} > 0$ alors $|x|\geqslant\eta \Rightarrow |b(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_1\pi^m} = a \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_1 x^m}$.

Il suffit de prendre alors $\lambda = \inf(\dfrac{\gamma}{2},\lambda_1)$. . . . . $\boxed{3}$

b. On a $b'(x) = -m\gamma x^m c(x)$ où $c(x) = (1+\varepsilon(x)+\dfrac{x}{m}\varepsilon'(x))\,\mathrm{e}^{-\gamma x^m(1+\varepsilon(x))}$. $\lim\limits_{x\to0} c(x) = 1$ donc, $c(x) = 1+\varepsilon_1(x)$. . . . . $\boxed{2}$

On procède comme au a) pour la majoration. . . . . $\boxed{2}$

III.2. a. On pose $\varphi_{k,\alpha k-n} = \varphi$ alors

$$\int_{-\delta}^{+\delta}\varphi'(x)b(x)^k\,\mathrm{d}x = \left[b(x)^k\varphi(x)\right]_{-\delta}^{+\delta} - k\int_{-\delta}^{+\delta}\varphi(x)b^{k-1}(x)b'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $|b(x)|<1$, la première quantité est majorée par $|\varphi(\delta)|+|\varphi(-\delta)|$. Le **II.3.c** est aussi valable si l'on prend $x<0$ donc $|\varphi(\delta)|+|\varphi(-\delta)| \leqslant \dfrac{2C_1}{\sqrt[l]{k}}$. . . . . $\boxed{2}$

On majore la deuxième intégrale par

$$k\frac{C_1}{\sqrt[l]{k}}\int_{-\delta}^{+\delta}\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)x^m}\,C_3|x^{m-1}|\,\mathrm{d}x = k\frac{C_1}{\sqrt[l]{k}}\frac{2C_3}{m\lambda(k-1)}\left[\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)x^m}\right]_0^{+\delta}$$
$$\leqslant \frac{4C_1C_3}{m\lambda}\frac{1}{\sqrt[l]{k}}\frac{k}{k-1} \leqslant \frac{8C_1C_3}{m\lambda}\frac{1}{\sqrt[l]{k}}.$$

En posant $C_4 = 2C_1\left(1+\dfrac{4C_3}{m\lambda}\right)$ on obtient la majoration souhaitée ($k\geqslant2$). . . . . $\boxed{3}$

b. Sur $[\delta,\pi], |b(x)| \leqslant a < 1 \Rightarrow \left|\int_{\delta}^{\pi}\varphi'(x)b(x)^k\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \pi a^k$. Comme $a^k = o\left(\dfrac{1}{\sqrt[l]{k}}\right)$, on pourra trouver C_4' telle que $\left|\int_{\delta}^{\pi}\varphi'(x)b(x)^k\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{C_4'}{\sqrt[l]{k}}$. . . . . $\boxed{2}$

c. On rassemble tous les résultats obtenus avec φ et ceux que l'on aurait obtenus avec ψ et on utilise la majoration $|x+iy| \leqslant |x|+|y|$. . . . . $\boxed{2}$

III.3. a. On pose $\alpha = \max|a_{k,n}|$ et $|a_{k,n}|^2 \leqslant \alpha|a_{k,n}|$, le résultat est immédiat. . . . . $\boxed{1}$

b. • On a : $\displaystyle\sum_{n=-kN}^{+kN} |a_{k,n}|^2 \leqslant \frac{C_5}{\sqrt[l]{k}}.\|a^k\|$ en utilisant le **2.b**.

• Puis $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_{k,n}|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |a(x)|^{2k}\,\mathrm{d}x$ (égalité de Parseval).

Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} |a(x)|^{2k}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-2k\gamma x^m(1+\varepsilon(x))}\,\mathrm{d}x \sim \sqrt[m]{k}J(2\gamma)$ (cf. **II.4.d**).

On obtient finalement le résultat annoncé : $\|a^k\| \geqslant C_6 k^{\frac{1}{l}-\frac{1}{m}}$. . . . . $\boxed{5}$

c. $\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{m} > 0$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|a^k\| = +\infty$ donc A n'est pas stable. . . . . $\boxed{2}$

III.4. On essaie d'écrire $a(x)$ sous la forme $a(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x + ix^l q(x) - \gamma x^m(1+\varepsilon(x))}$:

$a(x) = 1 + Z(x)$ où $Z(x) = -i\xi\sin x + \xi^2(\cos x - 1) = -i\xi x - \dfrac{1}{2}\xi^2x^2 + \dfrac{i}{6}\xi x^3 + \dfrac{\xi^2}{24}x^4 + o(x^4)$.

Avec $Z(x) = \mathrm{e}^{z(x)} - 1$ on peut écrire $z(x) = Z(x) - \dfrac{1}{2}Z^2(x) + \dfrac{1}{3}Z^3(x) - \dfrac{1}{4}Z^4(x) + o(x^4)$.

En faisant le développement limité de $z(x)$, on trouve :

$$z(x) = -i\xi x + \frac{i\xi}{6}(1-\xi^2)x^3 - \frac{\xi^2}{8}(1-\xi^2)x^4 + o(x^4).$$

Il suffit de poser $\alpha = -\xi,\ l = 3,\ q(x) = \dfrac{1}{6}\xi(1-\xi^2),\ \gamma = \dfrac{\xi^2}{8}(1-\xi^2) > 0$ et dans ce cas a aura bien la forme annoncée. . . . . $\boxed{6}$

On remarque ensuite que $a(x) = \dfrac{\xi(\xi+1)}{2}\mathrm{e}^{-ix} + 1 - \xi^2 + \dfrac{\xi(\xi-1)}{2}\mathrm{e}^{ix}$ d'où

$$|a(x)|^2 = 1 - 4\xi^2(1-\xi^2)\sin^4\frac{x}{2} < 1 \text{ pour } x \neq 0$$

On peut utiliser la conclusion du **3.c**, $\|a^k\| \geqslant C_6\sqrt[12]{k}$ et A n'est pas stable. . . . . $\boxed{2}$