X MATH 1 99

Première partie $\boxed{10}$

1. $K(x,y) = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $x \mapsto K(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et .... $\boxed{1}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \qquad \text{car } y > 0.$$ $\boxed{1}$

2. Après calculs on obtient

$$\partial_1 K(x,y) = -\frac{2xy}{\pi(x^2+y^2)^2} \qquad \partial_2 K(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\pi(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_1^2 K(x,y) = \frac{6x^2y-2y^3}{\pi(x^2+y^2)^3} \qquad \partial_2^2 K(x,y) = -\frac{6x^2y-2y^3}{\pi(x^2+y^2)^3}$$

Conclusion : $\Delta K = 0$. .... $\boxed{2}$

Remarque : comme $K(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Im}\dfrac{1}{x+iy}$ la relation $\Delta K(x,y) = 0$ est immédiate.

3. On procède par récurrence sur $m+n$.
Si $m+n = 1$ alors la propriété est vérifiée avec $P_{1,0}(x,y) = -2xy$, $P_{0,1}(x,y) = x^2-y^2$.
On suppose la propriété vraie à l'ordre p.
À l'ordre $p+1$:

- Si $m \geqslant 1$, comme $m+n = p+1$ cela s'écrit $(m-1)+n = p$ et on applique l'hypothèse de récurrence d'où

$$\begin{aligned}(\partial_1^m\partial_2^n K)(x,y) &= \partial_1\left[\partial_1^{m-1}\partial_2^n K\right](x,y) \text{ grâce au th. de Schwarz}\\ &= \frac{(x^2+y^2)\partial_1 P_{m-1,n}(x,y) - 2(m+n)xP_{m-1,n}(x,y)}{(x^2+y^2)^{m+n+1}}\end{aligned}$$

  et on pose

$$P_{m,n}(x,y) = (x^2+y^2)\underbrace{\partial_1 P_{m-1,n}(x,y)}_{\deg\leqslant 2(m+n)-3} - 2(m+n)\underbrace{xP_{m-1,n}(x,y)}_{\deg\leqslant 2(m+n)-1}$$

  ce qui prouve la propriété dans ce cas. .... $\boxed{3}$

- Si $m = 0$ alors

$$\begin{aligned}(\partial_2^n K)(x,y) = \partial_2(\partial_2^{n-1}K)(x,y) &= \partial_2\left[\frac{P_{0,n-1}(x,y)}{(x^2+y^2)^n}\right]\\ &= \frac{(x^2+y^2)\partial_2 P_{0,n-1}(x,y) - 2nyP_{0,n-1}(x,y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

  et on prend dans ce cas

$$P_{0,n}(x,y) = (x^2+y^2)\underbrace{\partial_2 P_{0,n-1}(x,y)}_{\deg\leqslant 2n-2} - 2n\underbrace{yP_{0,n-1}(x,y)}_{\deg\leqslant 2n}$$

  ce qui achève la récurrence. .... $\boxed{3}$

On trouve en fait, avec la remarque du 2 que

$$\begin{aligned}(\partial_1^m\partial_2^n K(x,y) &= \frac{(-1)^{m+n}}{\pi}(m+n)!\,\mathrm{Im}\,\frac{i^n}{(x+iy)^{m+n+1}}\\ &= \frac{(-1)^{m+n}}{\pi}(m+n)!\,\mathrm{Im}\,\frac{i^n(x-iy)^{m+n+1}}{(x^2+y^2)^{m+n+1}}\end{aligned}$$

i.e. $P_{m,n}(x,y) = \dfrac{(-1)^{m+n}}{\pi}(m+n)!\,\mathrm{Im}\,[i^n(x-iy)^{m+n+1}]$.

Deuxième partie $\boxed{36}$

4. $\varphi\ : t \mapsto f(t)K(x-t,y)$ est localement intégrable car elle est continue. Comme f est bornée, $\varphi = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. . . . . $\boxed{1}$

5. a) On a $\Phi_f(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t$ alors

$$|\Phi_f(x,y)| \leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty$$

(en posant $u = t - x$, on se ramène au calcul du I.1.). Φ_f est donc bornée. . . . . $\boxed{2}$
Montrons que Φ_f est continue. On va utiliser le théorème de Lebesgue de continuité sous le signe intégral. Tout d'abord, on fait le changement de variable $t - x = uy$ $(y > 0)$ ce qui donne la nouvelle expression de Φ_f :

$$\Phi_f(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+uy)\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

- $(x,y,u) \mapsto \dfrac{f(x+uy)}{\pi[1+u^2]}$ est une fonction continue de x, y, u.
- Soit $(x,y) \in \Pi_+$ alors

$$\left|\frac{f(x+uy)}{\pi[1+u^2]}\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\frac{1}{1+u^2}$$

  qui est intégrable.

Le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique et on peut conclure que Φ_f est continue sur Π_+. . . . . $\boxed{4}$

b. On a vu au début que $|\Phi_f(x,y)| \leqslant \|f\|_\infty$ donc $\|\Phi_f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Comme $\Phi\ : f \mapsto \Phi_f$ est visiblement linéaire, Φ est continue. . . . . $\boxed{1}$
Si $f = 1$ (fonction constante égale à 1) alors $\Phi_f(x,y) = 1$ donc on a effectivement $\|\Phi\| = 1$. . . . . $\boxed{1}$

6. On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral et une récurrence sur $m+n$, l'ordre de dérivation de Φ_f. La propriété est bien vraie pour $p = m + n = 0$
Hypothèse de récurrence : Φ_f est dérivable m fois par rapport à x, n fois par rapport à y pour $m + n \leqslant p$ et

$$\partial_1^m\partial_2^n\Phi_f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,[\partial_1^m\partial_2^n K(x-t,y)]\,\mathrm{d}t.$$

Supposons que $m + n = p + 1$, on va utiliser le résultat du I.3. avec le théorème de Lebesgue de dérivation.

On sait que $\varphi_{m,n}(t) = f(t)\dfrac{P_{m,n}(x-t,y)}{[(x-t)^2+y^2]^{m+n+1}}$ et on se place sur le compact $[a,b]\times[c,d]$. On pose $P_{m,n}(x-t,y) = Q_{m,n}(t)$. Alors $\deg(Q_{m,n}) \leqslant 2(m+n)$ d'après le I.3. D'où

$$Q_{m,n}(t) = \sum_{k=0}^{2(m+n)} a_k(x,y)\times t^k.$$

Or, les a_k sont des fonctions polynomiales de x et y et donc sont bornées sur le compact. D'où

$$\begin{aligned}|Q_{m,n}(t)| &\leqslant \sum_{k=0}^{2(m+n)} |a_k(x,y)|\times|t|^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2(m+n)} \|a_k(x,y)\|\times|t|^k = F_{m,n}(t)\end{aligned}$$

Pour le dénominateur, on minore le dénominateur :

$$((x-t)^2+y^2)^{m+n+1} \geqslant \min_{x\in[a,b]}[(x-t)^2]+c^2.$$

L'hypothèse de domination s'écrit

$$f(t)\,[\partial_1^m\partial_2^n K(x-t,y)] \leqslant \frac{F_{m,n}(t)}{(\min_{x\in[a,b]}[(x-t)^2]+c^2)^{m+n+1}} = \varphi(t)$$

avec φ continue et $\varphi(t) = O(\frac{1}{t^2})$ (le numérateur est de degré $\leqslant 2(m+n)$ et le dénominateur est de degré $2(m+n+1)$), donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral. . . . . $\boxed{8}$

Enfin, on a

$$(\partial_1^2\Phi_f + \partial_2^2\Phi_f)(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\partial_1^2+\partial_2^2)(K(x-t,y))\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \boxed{1}$$

7. Il suffit en fait de majorer les dérivées partielles et d'utiliser le théorème des accroissements finis.

$$\begin{aligned}\partial_1\Phi_f(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{-2(x-t)y}{[(x-t)^2+y^2]^2}\,\mathrm{d}t \\ |\partial_1\Phi_f(x,y)| &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2|x-t|y}{[(x-t)^2+y^2]^2}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t \text{ avec l'inégalité } 2ab\leqslant a^2+b^2 \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{y} \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{a}\end{aligned}$$

où on a utilisé le calcul du 1.

De même

$$\begin{aligned}|\partial_2\Phi_f(x,y)| &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|u^2-y^2|}{(u^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{y} \leqslant \frac{\|f\|}{a}.\end{aligned}$$

On a donc $\|\operatorname{grad}\Phi_f(x,y)\| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}\|f\|_\infty}{a}$ et, par le théorème des accroissements finis,

$$|\Phi_f(x,y)-\Phi_f(x_0,y_0)| \leqslant \frac{\sqrt{2}\|f\|_\infty}{a}\|(x,y)-(x_0,y_0)\|. \qquad \boxed{6}$$

Remarque : en utilisant la remarque du 2 on obtient $\|\nabla K(x,y)\|^2 = \dfrac{1}{\pi^2(x^2+y^2)^2}$ d'où

$$\|\nabla\Phi_f(x,y)\| \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\nabla K(x-t,y)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{\pi}y.$$

8. On sait que $1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x-t,y)\,\mathrm{d}t$ donc

$$\Phi_f(x,y)-f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}[f(t)-f(x_0)]K(x-t,y)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est continue en x_0, il existe $\eta'>0$ tel que $|t-x_0|\leqslant\eta' \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ donc

$$|\Phi_f(x,y)-f(x_0)| \leqslant \underbrace{\int_{|t-x_0|\leqslant\eta'}|f(t)-f(x_0)|K(x-t,y)\,\mathrm{d}t}_{\leqslant\varepsilon/2} + \int_{|t-x_0|\geqslant\eta'}|f(t)-f(x_0)|K(x-t,y)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{2\|f\|_\infty\int_{|t-x_0|\geqslant\frac{1}{2}\eta'}K(x-t,y)\,\mathrm{d}t}_{=A}.$$

On peut effectivement calculer A :

$$A = 2\|f\|_\infty 2\int_{\eta'/2}^{+\infty}K(u,y)\,\mathrm{d}u = \frac{4\|f\|_\infty}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{\eta'}{2y}\right]$$
$$\leqslant \frac{4\|f\|_\infty}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{\eta'}{2\eta}\right].$$

On choisit alors $\eta\leqslant\dfrac{\eta'}{2}$ suffisamment petit pour que $A\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui prouve l'inégalité. $\boxed{6}$

9. a. On reprend le raisonnement du 8, le choix de η' ne dépend plus de x, la conclusion est alors immédiate. . . . . $\boxed{1}$

b. Pour prouver que la fonction Φ_f est uniformément continue, on procède de la manière suivante : soit $\varepsilon>0$

- on choisit le η mis en évidence au a) en prenant $\dfrac{\varepsilon}{2}$;
- pour $y\geqslant\dfrac{\eta}{2}$, on sait que Φ_f est uniformément continue sur $\mathbb{R}\times[\eta/2,+\infty[$ donc, pour cet $\varepsilon>0$, il existe $\eta'>0$ convenable tel que
$$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|\leqslant\eta' \Rightarrow |\Phi_f(x_1,y_1)-\Phi_f(x_2,y_2)|\leqslant\varepsilon;$$
- on prend alors $\eta''=\inf(\eta',\frac{1}{2}\eta)$ et, en notant $\Pi_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant\eta\}$ et $\Pi_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant\eta/2\}$, on majore $\overline{\Phi}_f(x_1,y_1)-\overline{\Phi}_f(x_2,y_2)|$ pour $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|\leqslant\eta''$ en distinguant les cas :
  - (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sont dans Π_2, $\overline{\Phi}_f$ est uniformément continue sur Π_2,
  - (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sont dans Π_1 alors

$$|\overline{\Phi}_f(x_1,y_1)-\overline{\Phi}_f(x_2,y_2)|\leqslant|\overline{\Phi}_f(x_1,y_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-\overline{\Phi}_f(x_2,y_2)|$$

et on utilise le a. . . . . $\boxed{5}$

Troisième partie $\boxed{19}$

10. a. On a

$$\begin{aligned}\Phi_f(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha t}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t \text{ et en posant } u = x-t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha(x-u)}\frac{y}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u\\ &= f(x)g(y)\end{aligned}$$

où $g(y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha u}\frac{y}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u$. .... $\boxed{2}$

b. On sait que $\Delta\Phi_f = 0$ soit $f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0$ ce qui donne, en simplifiant par $e^{i\alpha x}$, $-\alpha^2 g(y) + g''(y) = 0$ donc $g(y) = ae^{\alpha y} + be^{-\alpha y}$. Comme $g(0) = 1$, que g doit être bornée (car Φ_f l'est) et que $\lim\limits_{y\to 0}\Phi_f(x,y) = f(x)$ (question 8), on en déduit que $g(y) = e^{-\alpha y}$ soit

$$\phi_f(x,y) = e^{-\alpha y}e^{i\alpha x}. \qquad \boxed{4}$$

11. On a vu que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha u}\frac{y}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u = e^{-\alpha y}$ donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\alpha u}}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi e^{-\alpha y}}{y}$ pour $y > 0$. En prenant le conjugué et en changeant le nom des variables, on obtient $\psi(p) = \pi\dfrac{e^{-pa}}{a}$ pour $p > 0$. Comme la fonction est impaire par rapport à p, on en déduit finalement que $\psi(p) = \pi\dfrac{e^{-|p|a}}{a}$. .... $\boxed{3}$

Ensuite

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy}\psi(p)\,\mathrm{d}p &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy}\pi\frac{e^{-|p|a}}{a}\,\mathrm{d}p = \frac{\pi}{a}\int_0^{+\infty}\left(e^{-ipy}e^{-pa} + e^{ipy}e^{-pa}\right)\mathrm{d}p\\ &= \frac{2\pi}{a}\int_0^{+\infty} e^{-pa}\cos py\,\mathrm{d}p = \frac{2\pi}{a}\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-pa+ipy}\,\mathrm{d}p\right) = \frac{2\pi}{a}\frac{a}{a^2+y^2}\\ &= \frac{2\pi}{a^2+y^2}\end{aligned} \qquad \boxed{3}$$

ce qui correspond à l'inversion de Fourier.

12. a. $h(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)K(\underbrace{x-t}_{=u}, y_0)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)K(u,y_0)\,\mathrm{d}u$ donc, comme f est 2π-périodique, $h(x+2\pi) = h(x)$. On sait aussi que h est $\mathcal{C}^\infty$ .... $\boxed{1}$

b. $x \mapsto \displaystyle\int_{-A}^{A} f(x-t)K(t,y_0)\,\mathrm{d}t$ est continue et

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x-t)K(t,y_0)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\|f\|_\infty K(t,y_0)\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty$$

(hypothèse de domination). De plus

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x-t)K(t,y_0)\,\mathrm{d}t = \Phi_f(x,y_0)$$

donc, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a bien

$$\widehat{h}(n) = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\left(\int_{-A}^{A} f(x-t)K(t,y_0)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \qquad \boxed{3}$$

Or le théorème de Fubini nous donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\left(\int_{-A}^{A} f(x-t)K(t,y_0)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x &= \int_{-A}^{A} K(t,y_0)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x-t)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-A}^{A} K(t,y_0)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{2\pi-t} e^{-in(u+t)} f(u)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-A}^{A} K(t,y_0)e^{-int}\widehat{f}(n)\,\mathrm{d}t\\ &= \widehat{f}(n)\int_{-A}^{A} e^{-int}K(t,y_0)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{h}(n) &= \widehat{f}(n)\int_{\mathbb{R}} e^{-int}K(t,y_0)\,\mathrm{d}t\\ &= \widehat{f}(n)\phi_h(0,y_0) \text{ avec } h(x)=e^{inx}\\ &= \widehat{f}(n)e^{-|n|y_0}\end{aligned}$$

Conclusion: on a $\widehat{h}(n)=\widehat{f}(n)e^{-|n|y_0}$. 4

Quatrième partie $\boxed{11}$

13. On sait que si $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$ alors f est uniformément continue donc le II.9 s'applique. . 2

14. Soit X tel que $|t|\geqslant X \Rightarrow |f(t)|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ alors

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)K(x-t,y)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \underbrace{\int_{|t|\geqslant X} f(t)K(x-t,y)\,\mathrm{d}t}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2}} + \|f\|_\infty \int_{|t|\leqslant X} K(x-t,y)\,\mathrm{d}t.$$

On a deux choix :

- si y est grand ($y\geqslant a$) alors $K(x-t,y)=\dfrac{y}{\pi[(x-t)^2+y^2]}\leqslant\dfrac{1}{\pi y}\leqslant\dfrac{1}{\pi a}$ et on prend $a\geqslant\dfrac{4\|f\|_\infty X}{\varepsilon\pi}$ d'où $K(x-t,y)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty X}$ et $\|f\|_\infty\int_{|t|\leqslant X}K(x-t,y)\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$;. . . 3
- si x est grand ($|x|\geqslant u > X$), on utilise l'inégalité $\dfrac{y}{(x-t)^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2|x-t|}$ (conséquence de l'inégalité $2ab\leqslant a^2+b^2$) donc $K(x-t,y)\leqslant\dfrac{1}{2\pi|x-t|}\leqslant\dfrac{1}{2\pi(u-X)}$ car $|t|\leqslant X\Rightarrow|x-t|\geqslant u-X$. On prend $u\geqslant X+\dfrac{4X\|f\|_\infty}{\varepsilon\pi}$. On peut alors conclure comme lorsque y est grand. 3

15. Vu le 14, on a $\lim\limits_{|x|+y\to+\infty}\Phi_f(x,y)=0$. 1

16. On a vu que $\|\Phi\|=1$ au II.5.b, on trouve ici aussi que $\|\Phi\|=1$, il suffit de prendre par exemple $f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{si } |x|\leqslant n\\ n+1-|x| & \text{si } n\leqslant|x|\leqslant n+1\\ 0 & \text{si } |x|\geqslant n\end{cases}$. En effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t,y)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)K(x-t,y)\,\mathrm{d}t = \Phi_{f_n}(x,y) \geqslant \int_{-n}^{n} K(x-t,y)\,\mathrm{d}t$$

et les deux termes qui réalisent l'encadrement tendent vers 1. 2