SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Préliminaires

$\boxed{0^\circ}$

0.1 On pose $F_{xy}(t) = f(ty + (1-t)x)$, F_{xy} est convexe donc

$$F_{xy}(1) \geqslant F_{xy}(0) + F'_{xy}(0)$$

soit $f(y) \geqslant f(x) + < \nabla f(x), y - x >$ .... $\boxed{2}$

Réciproquement : si on a la propriété ci-dessus alors, en posant $z_t = ty + (1-t)x$, et en l'appliquant à z_t et $z_{t'}$ on en déduit que F_{xy} est convexe donc f est convexe.
En effet si on écrit $f(z_t) \geqslant f(z_{t'}) + < \nabla f(z_t), z_t - z_{t'} >$ alors, en calculant la dérivée $F'_{xy}(t) = f'(z_t)(y-x) =< \nabla f(z_t), y - x >$, on a $< \nabla f(z_t), z_t - z_{t'} >= (t-t')F'_{xy}(t)$ soit finalement

$$F_{xy}(t) \geqslant F_{xy}(t') + (t-t')F'_{xy}(t)$$

i.e. F_{xy} est convexe. On a alors, $\forall t \in [0,1]$, $F_{xy}(t) \leqslant (1-t)F_{xy}(0) + tF_{xy}(1)$ ce qui donne exactement $f(ty + (1-t)x) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x)$ donc f est convexe. .... $\boxed{3}$

0.2 Si f passe par un minimum en $x^* \in \mathcal{O}$ alors, on sait que $\nabla f(x^*) = 0$. .... $\boxed{1}$

Intéressons nous maintenant à la réciproque :
supposons $\nabla f(x) = 0$ alors, grâce à la propriété du 0.1, on a $f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x)$ ce qui donne $f(y) \geqslant f(x)$ ce qui prouve la réciproque. .... $\boxed{3}$

0.3 On pose $F_{xy}(t) = f(ty + (1-t)x)$ ce qui donne $F'_{xy}(t) = f'(ty + (1-t)x)(y-x)$ et $F''_{xy}(t) = f''(ty + (1-t)x)(y-x)^2$ d'où si f est convexe alors $f''(ty + (1-t)x)(y-x)^2 \geqslant 0$ ce qui entraîne $f''(x)(y-x)^2 \geqslant 0$ et donc $f''(x)$ est semi-définie positive. .... $\boxed{3}$

Réciproquement, on utilise la formule de Taylor avec reste de Lagrange (on a le droit car f est à valeur réelle).

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{1}{2}f''(x+th)(h^2) \text{ d'où } f(x+h) \geqslant f(x) + f'(x)(h)$$

ce qui donne le résultat. .... $\boxed{2}$

Si de plus A est définie positive alors f est strictement convexe (on utilise la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour les fonctions de 2 variables). .... $\boxed{2}$

Partie I

$\boxed{1^\circ}$ Comme $\overline{B}(x^*, r)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, il existe bien un x_k minimisant F_k qui est une application continue.

1.1 On a $F_k(x_k) \leqslant F_k(x^*)$ par définition de x_k. Or $F_k(x^*) = f(x^*)$ car $x^* \in S$. D'où l'inégalité demandée. .... $\boxed{3}$

En explicitant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} [g_i^+(x_k)]^2 + \sum_{j=1}^{q} [h_j(x_k)]^2 \leqslant \frac{1}{k}[f(x^*) - f(x_k) - \|x_k - x^*\|^2].$$

$\|f(x_k)\|$ est bornée par $\displaystyle\sup_{x \in \overline{B}(x^*, r)} \|f(x)\|$ donc, on peut passer à la limite quand k tend vers $+\infty$ et on obtient alors

$$\lim_{k \to +\infty} g_i^+(x_k) = 0 \text{ et } \lim_{k \to +\infty} h_j(x_k) = 0. \qquad \boxed{3}$$

1.2 La suite (x_k) étant dans un compact, on peut en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(k)})$. Si $\tilde{x}$ en est la limite alors on sait que $g_i^+(\tilde{x}) = 0$ et $h_j(\tilde{x}) = 0$ donc $\tilde{x} \in S \cap \overline{B}(x^*, r)$.
En exploitant alors l'inégalité $F_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) \leqslant f(x^*)$ alors

$$f(x_{\varphi(k)}) + \|x_{\varphi(k)} - x^*\|^2 \leqslant F_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) \leqslant f(x^*)$$

ce qui donne à la limite

$$f(\tilde{x}) + \|\tilde{x} - x^*\|^2 \leqslant f(x^*)$$

et comme $f(x^*) \leqslant f(\tilde{x})$ on en déduit l'égalité $\tilde{x} = x^*$. 4
Conclusion : vu que toute suite extraite de la suite (x_k) converge vers x^*, on en déduit que la suite (x_k) converge (si (x_k) ne convergeait pas, on pourrait lui trouver deux valeurs d'adhérence distinctes). 2

1.3

1.3.1 La dérivée de $(x \mapsto (x^+)^2)$ est $2x^+$ (cette fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$).
On en déduit immédiatement

$$\nabla\Phi_k(U) = (1, 2kv_1^+, \ldots, 2kv_p^+, 2kw_1, \ldots, 2kw_q)$$

et

$$\|\nabla\Phi_k(U)\| = \left[1 + 4k^2\sum_{i=1}^{p}(v_i^+)^2 + 4k^2\sum_{j=1}^{q} w_j^2\right]^{1/2}. \qquad 2$$

$\dfrac{\nabla\Phi_k(U_k)}{\|\nabla\Phi_k(U_k)\|}$ est une suite de vecteurs de la sphère unité dont on peut extraire une suite convergente. 1
Soient $(\lambda_0^k, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_p^k, \mu_1^k, \ldots, \mu_q^k)$ les composantes de cette suite et la limite d'une suite extraite $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q)$. Alors les expressions :

$$\lambda_0^k = \frac{1}{\|\nabla\Phi_k(U)\|} \text{ et } \lambda_i^k = \frac{2kg_i^+(x_k)}{\|\nabla\Phi_k(U)\|}$$

nous permettent d'affirmer que $\lambda_0 \geqslant 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$, ce qui donne (β). 1
Qui plus est, comme la limite est encore sur la sphère unité on a bien la propriété (α). 2

1.3.2 La régle de différenciation des applications composées nous fournit immédiatement le résultat :

$$\nabla F_k(x_k) = \nabla f(x_k) + 2k\sum_{i=1}^{p} g_i^+(x_k)\nabla g_i(x_k) + 2k\sum_{j=1}^{q} h_j(x_k)\nabla h_j(x_k) + 2(x_k - x^*). \qquad 1$$

La suite (x_k) convergeant vers x^*, à partir d'un certain rang, elle se trouve dans la boule $B(x^*, r)$. Comme x_k minimise F_k sur $\overline{B}(x^*, r)$ on a $\nabla F_k(x_k) = 0$ ce qui donne :

$$\lambda_0^k\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^k\nabla g_i(x_k) + \sum_{j=1}^{q}\mu_j^k\nabla h_j(x_k) + 2\frac{x_k - x^*}{\|\nabla\Phi_k(x_k)\|} = 0. \qquad 2$$

Bilan : $\|\nabla\Phi_k(x_k)(U_k)\| \geqslant 1$, $x_k \to x^*$, ∇f, ∇g_i, ∇h_j sont continues (par hypothèse).
On prend alors la sous-suite mise en évidence à la question précédente (1.3.1) et on passe à la limite dans l'expression ci-dessus pour obtenir :

$$(\delta) \qquad \lambda_0\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q}\mu_j\nabla h_j(x^*) = 0 \qquad 2$$

Si $g_i(x^*) < 0$ alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant K \Rightarrow g_i^+(x_k) = 0$ et donc λ_i qui est limite d'une sous-suite de $\dfrac{2kg_i^+(x_k)}{\|\nabla\Phi_k(U_k)\|} = 0$ est nulle donc $\lambda_i g_i(x^*) = 0$. Comme $g_i(x^*) \leqslant 0$ on a par conséquent

$$(\gamma)\lambda_i g_i(x^*) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, p \qquad \boxed{3}$$

$\boxed{2^\circ}$

2.1 Raisonnons par l'absurde en supposant $\lambda_0 = 0$ (en effet, on sait déjà que $\lambda_0 \geqslant 0$). On a

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) = 0,$$

distinguons plusieurs cas :

- tous les λ_i sont nuls. On aurait alors les μ_j non tous nuls et $\sum\limits_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x) = 0$ ce qui contredit l'indépendance linéaire des $(\nabla h_j(x))$.
- il existe $i_0 \in [1, p]$ tel que $\lambda_{i_0} > 0$ (on sait déjà que $\lambda_{i_0} \geqslant 0$). On sait alors que $g_{i_0}(x) = 0$ d'après (γ). On utilise maintenant la deuxième partie de l'hypothèse $(\mathbf{QC})_x$ ce qui donne :
$$0 = \lambda_{i_0} < \nabla g_{i_0}(x), d > + \sum_{i \neq i_0, g_i(x)=0} \lambda_i < \nabla g_i(x), d >< 0$$
ce qui donne encore une impossibilité c.q.f.d. . . . . $\boxed{4}$

2.2 Si $(\lambda_i), (\mu_j)$ est un élément de $\mathcal{M}_1(x)$ alors on a les conditions $(\beta'), (\gamma'), (\delta')$ dérivées des conditions $(\beta), (\gamma), (\delta)$. Ceci nous permet d'affirmer que $\mathcal{M}_1(x)$ est un convexe fermé. . . . . $\boxed{2}$
Il reste à montrer que $\mathcal{M}_1(x)$ est borné :
Grâce à $(\mathbf{QC})_x$ et à (δ') on peut écrire :

$$0 \leqslant \sum_{i|g_i(x)=0} \lambda_i[- < \nabla g_i(x), d >] =< \nabla f(x), d >$$

d'où

$$\lambda_k \leqslant \sum_{i|g_i(x)=0} \lambda_i \leqslant \frac{< \nabla f(x), d >}{\min\limits_{i|g_i(x)=0} [- < \nabla g_i(x), d >]}$$

i.e. les (λ_i) sont donc bornés. . . . . $\boxed{2}$
il reste à prouver qu'il en est de même des (μ_j) :
Soit $E = \text{Vect}\,(\nabla h_j(x))$ muni de la norme infinie dans la base des $(\nabla h_j(x))$. Les vecteurs $\nabla f(x) + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x) = -\sum\limits_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x)$ décrivent un ensemble borné de E. On peut donc affirmer que les (μ_j) sont bornés c.q.f.d. . . . . $\boxed{3}$

$\boxed{3^\circ}$

3.1 Prenons $d = \bar{x} - x$: on a bien $< \nabla h_j(x), d >=< a_j, \bar{x} > - < a_j, x >= b_j - b_j = 0$.
Soit i tel que $g_i(x) = 0$, comme les fonctions g_i sont convexes, on a bien

$$g_i(y) \geqslant g_i(x)+ < \nabla g_i(x), y - x > \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n.$$

On utilise cette propriété avec $y = \bar{x}$, sachant que $g_i(x) = 0$, ce qui donne

$$0 > g_i(\bar{x}) \geqslant< \nabla g_i(x), d > . \qquad \boxed{5}$$

3.2 Montrons la chaîne d'implication suivante : $(e_1) \Rightarrow (e_2) \Rightarrow (e_3) \Rightarrow (e_1)$.

- $(e_1) \Rightarrow (e_2)$: évident.

- $(e_2) \Rightarrow (e_3)$: comme (**QCC**)$\Rightarrow$ $\mathbf{QC}_x$, cette implication résulte des questions 1 et 2. $\boxed{1}$
- $(e_3) \Rightarrow (e_1)$: on a donc en notre possession des multiplicateurs (λ_i) et (μ_j). Comme les λ_i sont positifs ou nuls, les h_j affines, la fonction $\mathcal{L}$ est convexe et l'hypothèse (e_3) signifie que $\nabla\mathcal{L}(x) = 0$. Cette dernière propriété nous permet d'affirmer que x minimise $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{O}$.
  Or, pour tout $x' \in S$, $f(x') \geqslant \mathcal{L}(x')$ d'où
  $$\forall x' \in S, f(x') \geqslant \mathcal{L}(x') \geqslant \mathcal{L}(x) = f(x).$$ $\boxed{4}$

$\boxed{4^\circ}$

4.1 La matrice hessienne de f est définie positive, f est strictement convexe, l'ensemble S des contraintes est un compact convexe défini par
n contraintes $g_i(x) = -x_i \leqslant 0$,
1 contrainte $h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sigma = 0$.
La condition (**QCC**) est satisfaite (prendre $\bar{x} = \frac{1}{n}(\sigma, \ldots, \sigma)$ et, d'après la 3° question, la solution est caractérisée sur S par :
il existe μ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$-a_ib_ie^{-b_ix_i^*} + \mu = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } x_i^* > 0,$$
$$-a_ib_i + \mu \geqslant 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } x_i^* = 0.$$
Pour $x \in S$ il y a nécessairement un i tel que $x_i > 0$. . . . . $\boxed{2}$
f est continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Comme f est strictement convexe, le minimum est nécessairement unique. . . . . $\boxed{2}$

4.2 Soit $\Phi(r) = \sum_{i|r<a_ib_i} \frac{1}{b_i} \ln \frac{a_ib_i}{r}$ définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs positives.
On peut écrire
$$\Phi(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} \left(\ln \frac{a_ib_i}{r} \right)^+$$
ce qui assure la continuité de Φ. . . . . $\boxed{2}$
On vérifie sans peine que Φ est strictement décroissante. . . . . $\boxed{2}$
Si on prend $r \geqslant \max(a_ib_i)$ alors $\Phi(r) = 0$ et pour $r < \min(a_ib_i)$, $\Phi(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} \ln \frac{a_ib_i}{r}$ qui tend vers $+\infty$ en 0^+. . . . . $\boxed{1}$
On peut donc affirmer que $\Phi(r) = \sigma$ possède une unique solution pour $\sigma > 0$.

4.3 On fait la synthèse de ce qui vient d'être prouvé :
On trouve $\mu = r^*$, ceci donne l'unique solution x^* par les relations :
$$\begin{cases} x_i^* = \frac{1}{b_i} \ln \frac{a_ib_i}{r^*} & \text{pour les } i \text{ tels que } a_ib_i > r^* \\ x_i^* = 0 & \text{pour les } i \text{ tels que } a_ib_i \leqslant r^* \end{cases} \quad \text{ou encore } x_i^* = \frac{1}{b_i} \left[\ln \frac{a_ib_i}{r^*} \right]^+$$ $\boxed{4}$

Partie II

$\boxed{5^\circ}$

- Si $\boxed{\alpha > 0}$ alors $f''(x)$ est définie positive, f est strictement convexe et donc $\nabla f(x^*) = 0$ caractérise un minimum dans la boule ouverte.
  Or $\nabla f(x) = Bx + b$,

si $\delta > 1$ alors $x = (-1, 0)$ est la seule solution ce qui donne la réponse dans ce cas.
Si $\delta \leqslant 1$ alors le minimum se trouve sur la frontière. On peut alors vérifier de manière élémentaire qu'il se trouve en $x^* = (-\delta, 0)$. . . . . $\boxed{2}$

- Si $\boxed{\alpha = 0}$: f est toujours une fonction convexe. On cherche le minimum de f avec la contrainte $g(x) = \frac{1}{2}[\|x\|^2 - \delta^2] \leqslant 0$.
(**QCC**) est vérifié (prendre $\bar{x} = 0$ qui donne $g(\bar{x}) < 0$) et donc, d'après 3.2, il vient : $x^* \in S$ minimise f sur S ssi il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = (B + \lambda I_2)x^* + b = 0 & O1 \\ \lambda(\|x^*\| - \delta) = 0 & O2 \end{cases}$$

λ est de plus unique.
On distingue alors deux cas :
  - $\delta \geqslant 1$: si $\lambda > 0$ alors on aurait $\|x^*\| = \delta$ d'après $O1$ et $x^* = -(B + \lambda I_2)^{-1} b = -\dfrac{1}{1+\lambda} b$ qui est de norme strictement inférieure à 1, ce qui est impossible.
  On a donc $\lambda = 0$ et l'ensemble des solutions de $(\mathcal{P})$ est $\{-1\} \times [-x_2^*, x_2^*]$ avec $x_2^* = \sqrt{\delta^2 - 1}$.
  - $\delta < 1$: la condition $O1$ devient alors $(1 + \lambda)x_1^* + 1 = 0$ et $\lambda x_2^* = 0$.
  $\lambda = 0$ est impossible donc la condition $O2$ s'écrit : $\|(x_1^*, x_2^*)\| = \delta$ ce qui donne $\lambda = \dfrac{1-\delta}{\delta}$ et $(\mathcal{P}) = \{x^*\} = \{(-\delta, 0)\}$.

. . . . $\boxed{3}$

- Si $\boxed{\alpha < 0}$: les solutions de $(\mathcal{P})$ ne peuvent être à l'intérieur de S car $f''(x)$ n'est pas semi-définie positive.
Les points de S minimisant globalement f sur S vérifient nécessairement

$$\begin{cases} (B + \lambda I_2)x^* + b = \begin{pmatrix} (1+\lambda)x_1^* + 1 \\ (\alpha + \lambda)x_2^* \end{pmatrix} = 0 \\ \|(x_1^*, x_2^*)\| = \delta \end{cases}$$

Deux cas sont alors à distinguer : (on pose $\alpha' = \dfrac{1}{1-\alpha}$)
  - $\alpha' \leqslant \delta$ ce qui donne alors les solutions suivantes $\lambda = -\alpha$, $x_1^* = \alpha'$, $x_2^* = \pm\sqrt{\delta^2 - \alpha'^2}$.
  - $\alpha' > \delta$ et dans ce cas, la seule solution est $\lambda = \dfrac{1-\delta}{\delta}$, $x_1^* = -\delta, x_2^* = 0$. . . . . $\boxed{4}$

$\boxed{6^\circ}$

<u>6.1</u>

<u>6.1.1</u> Si $x^* = 0$ est solution de $\mathcal{P}$ on a nécessairement $\nabla f(0) = b = 0$ et $\nabla^2 f(0) = B$ semi-définie positive. . . . . $\boxed{2}$

Réciproquement, si $b = 0$ et B est semi-définie positive, alors $f(x) = \dfrac{1}{2} < Bx, x > \geqslant 0 = f(0)$ donc $x^* = 0$ est solution de $(\mathcal{P})$. . . . . $\boxed{1}$

<u>6.1.2</u> La formule que l'on demande de prouver n'est autre que la formule de Taylor appliquée à f. . . . . $\boxed{2}$

Le problème $(\mathcal{P})$ ayant toujours des solutions, dire qu'il n'a pas de solution sur la frontière signifie que toutes ses solutions sont à l'intérieur (!). On aura donc les premières conditions : $\nabla f(x^*) = Bx^* + b = 0$ et $\nabla^2 f(x^*) = B$ semi-définie positive.
Si B n'est pas définie positive, alors, pour d est un élément non nul de $\operatorname{Ker} B$ on a $f(x^* + \lambda d) =$

$f(x^*)$, il y aurait alors une solution sur la frontière, ce qui est exclus. Conclusion : B est définie positive et l'unique solution vérifie $x^* = -B^{-1}b$ ce qui entraîne que $\|B^{-1}b\| < \delta$. 3

Réciproquement : on utilise la formule indiquée, alors avec $x^* = -B^{-1}b$ qui est bien à l'intérieur de S, on obtient

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ et } f(x^*+h) = f(x^*) + \frac{1}{2} < \nabla^2 f(x^*)h, h >> f(x^*)$$

si $d \neq 0$ (en fait f est strictement convexe, ceci assure la réponse). 1

6.2

6.2.1 On cherche une solution x^* de $(\mathcal{P})$ sur la frontière. Avec $g(x) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \delta^2)$, $\nabla g(x^*) = x^*$ est non nul et donc, avec $d = -x^*$, $(\mathbf{QC})_{x^*}$ est vérifié. On peut donc appliquer le résultat du 2 $^\circ$, i.e. il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = 0 \text{ i.e. } Bx^* + b + \lambda x^* = 0.$$

Ceci fournit la condition (α) et permet aussi d'affirmer que λ est unique. 2

Il reste à prouver que $B + \lambda I_n$ est définie positive :
on a toujours

$$f(x+h) = f(x) + < \nabla f(x), h > + \frac{1}{2} < \nabla^2 f(x)h, h >,$$

on pose $h = td$. En remarquant que $< Bx^* + b + \lambda x^*, d >= 0$, on obtient

$$f(x^*+td) = f(x^*) + \frac{t^2}{2} < (B+\lambda I_n)d, d > + \frac{\lambda}{2}[\|x^*\|^2 - \|x^*+td\|^2] \tag{2}$$

pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ (on a utilisé $0 = \frac{t^2}{2}\lambda\|d\|^2 - \frac{t^2}{2}\lambda\|d\|^2$).

Soit d dans $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à l'hyperplan $< x^*, d >= 0$, alors, avec $t = -2\frac{< x^*, d >}{\|d\|^2}$, on remarque que $\|x^* + td\| = \|x^*\|$. Comme x^* minimise f sur S, on déduit de l'égalité (2) ci-dessus :

$$< (B+\lambda I_n)d, d > \geqslant 0$$

et par continuité de la forme quadratique $Q(d) =< (B+\lambda I_n)d, d >$ on peut étendre ce résultat à $\mathbb{R}^n$ c.q.f.d. 5

6.2.2 On peut à nouveau utiliser le résultat (2) en prenant $x = x^* + td$, ce qui donne

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2} < (B+\lambda I_n)(x-x^*), x - x^* > + \frac{\lambda}{2}[\|x^*\|^2 - \|x\|^2]. \tag{3}$$

comme $\lambda \geqslant 0$, $\|x^*\| = \delta \geqslant \|x\|$ et $B + \lambda I_n$ définie positive, on en déduit que $f(x) \geqslant f(x^*)$ pour tout x de S c.q.f.d. 2

6.2.3 On a, vu les hypothèses et la formule (3), $f(x^*) > f(x)$ pour tout x de S différent de x^*. x^* est donc la seule solution de $(\mathcal{P})$ sur S. 2

6.3 On rassemble tous les cas traités dans l'énoncé suivant :
$x^* \in S$ est un minimum global de f sur S ssi il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$\begin{cases} (\alpha) & (B+\lambda I_n)x^* + b = 0, \\ (\beta) & B + \lambda I_n \text{ est semi-définie positive} \\ (\gamma) & \lambda(\|x^*\| - \delta) = 0 \end{cases}$$

2

$\boxed{7^\circ}$

7.1 En appliquant Cauchy-Schwarz, on vérifie de manière élémentaire que $x^* = -\dfrac{b}{\|b\|}\delta$ est l'unique solution et que $f(x^*) = -\|b\|\delta$. . . . . $\boxed{2}$

7.2 On sait que $\lambda_1 = \inf\limits_{\|x\|=1} < Bx, x >$.
Si $\lambda_1 > 0$, B est définie positive, $x^* = 0$ est la seule solution de $(\mathcal{P})$ (et on a $f(x^*) = 0$).
Si $\lambda_1 = 0$, B est semi-définie positive, on a $E_1 = \operatorname{Ker} B$. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{P})$ est $E_1 \cap S$ (et, pour x^* solution de $(\mathcal{P})$, on a $f(x^*) = 0$).
Si $\lambda_1 < 0$, B n'est pas semi-définie positive, il ne peut y avoir de solutions de $(\mathcal{P})$ à l'intérieur de S. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{P})$ est donc $\{x \in \mathbb{R}^n | x \in E_1, \|x\| = \delta\}$ et le minimum de f sur S vaut $-\dfrac{1}{2}\lambda_1\delta^2$. . . . . $\boxed{4}$

7.3

7.3.1 Soit (v_i) une base orthonormée de vep de B associée aux vap λ_i. b peut s'écrire :

$$b = \sum_{i=1}^{n} < b, v_i > v_i$$

comme $(B + \lambda I_n)^{-1} v_i = \dfrac{1}{\lambda + \lambda_i} v_i$ on obtient immédiatement

$$x(\lambda) = -(B + \lambda I_n)^{-1} b = \sum_{i=1}^{n} \frac{< b, v_i >}{\lambda_i + \lambda} v_i. \qquad \boxed{2}$$

7.3.2

On a $\theta(\lambda) = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{< b, v_i >}{\lambda_i + \lambda}\right)\right]^{1/2}$ donc $\theta(\lambda) > 0$ et θ est strictement décroissante. . . . . . $\boxed{1}$
On a aussi $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \theta(\lambda) = 0$. . . . . $\boxed{1}$
Étudions la limite de θ quand $\lambda \to \lambda_1$:

- Si $b \notin E_1^\perp$ alors $\lim\limits_{\lambda \downarrow -\lambda_1} \theta(\lambda) = +\infty$. . . . . $\boxed{2}$
- Si $b \in E_1^\perp$ alors $\lim\limits_{\lambda \downarrow -\lambda_1} \theta(\lambda) = \left[\sum\limits_{i|\lambda_i \neq \lambda_1} \left(\dfrac{< b, v_i >}{\lambda_i - \lambda_1}\right)\right]^{1/2}$ . . . . $\boxed{2}$

Étude de la convexité de θ :
comme $\theta(\lambda)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{< b, v_i >}{\lambda_i + \lambda}\right)^2$ alors θ^2 est convexe. Comme $\theta = [\theta^2]^{1/2}$ on a $\theta' = \dfrac{[\theta^2]'}{2\theta}$. θ est positive, décroissante, $\dfrac{1}{\theta}$ est positive croissante.
θ^2 étant convexe, $[\theta^2]'$ est croissante.
Conclusion : θ' étant le produit d'une fonction positive croissante par une fonction croissante est un fonction croissante. Il en résulte que θ est convexe. . . . . $\boxed{4}$

7.4

7.4.1 La projection de b sur $\operatorname{Im}(B - \lambda_1 I_n)$ s'écrit : $\sum\limits_{i|\lambda_i \neq \lambda_1} < b, v_i > v_i$ et donc

$$(B - \lambda_1 I_n)^+ b = \sum_{i|\lambda_i \neq \lambda_1} \frac{< b, v_i >}{\lambda_i - \lambda_1} v_i. \qquad \boxed{2}$$

7.4.2 Si $b \notin E_1^{\perp} = \mathrm{Im}(B - \lambda_1 I_n)$ on sait que l'équation $\theta(\lambda) = \delta$ a une seule solution λ^* sur $]-\lambda_1, +\infty[$ et $x^* = x(\lambda^*)$ est solution de $(\mathcal{P})$. 2

On a exactement la même conclusion si $\|(B - \lambda_1)^+ b\| > \delta$. 2

7.5 On a $\psi' = \dfrac{\theta'}{\theta^2}$ qui est le produit d'une fonction croissante par une fonction croissante positive, ψ' est donc croissante et ψ convexe. 2

7.6 On sait ici que l'équation $\theta(\lambda) = \delta$ a une unique solution λ^* dans $]-\lambda_1, +\infty[$ (cf 7.4).

7.6.1 On a $\bar{\theta}_k(\lambda^k) = \dfrac{a_k}{b_k + \lambda^k} - \delta = \theta(\lambda^k)$ et $\bar{\theta}'_k(\lambda^k) = -\dfrac{a}{(b_k + \lambda^k)^2} = \theta'(\lambda^k)$.

Avec ces deux conditions, on arrive à :

$$a_k = -\frac{[\delta + \theta(\lambda^k)]^2}{\theta'(\lambda^k)}, b_k = -\lambda_k - \frac{\delta + \theta(\lambda^k}{\theta'(\lambda^k}.$$

La racine λ^{k+1} de l'équation $\bar{\theta}_k(\lambda) = 0$ est

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{\theta(\lambda^k}{\theta'(\lambda^k})\frac{\delta - \theta(\lambda^k)}{\delta}.$$ 2

7.6.2 Dans l'algorithme de Newton, on calcule λ^{k+1} par la formule $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \dfrac{\psi(\lambda^k)}{\psi'(\lambda^k)}$.

Or, après calculs, on constate que l'on obtient ainsi la même formule.

L'algorithme proposé n'est autre que l'algorithme de Newton. Il converge bien car la fonction ψ est convexe. 2

7.7

On a $u = -(B + \lambda^k I_n)^{-1} b (= x(\lambda^k))$, $v = C^{-1} x(\lambda^k)$.

Or $\theta'(\lambda^k) = \dfrac{< x'(\lambda^k), x(\lambda^k) >}{\theta(\lambda^k)}$.

Mais, $x(\lambda) = -(B + \lambda I_n)^{-1} b$ admet pour dérivée $x'(\lambda) = -(B + \lambda I_n)^{-1} x(\lambda)$ (dériver $(B + \lambda I_n) x(\lambda)$).

D'où $\theta'(\lambda) = -\dfrac{(CC^{\mathrm{T}})^{-1} x(\lambda^k), x(\lambda^k)}{\theta(\lambda^k)} = -\dfrac{\|C^{-1} x(\lambda^k)\|^2}{\theta(\lambda^k)}$.

Ceci donne $\|v\|^2 = -\theta(\lambda^k)\theta'(\lambda_k)$.

Conclusion : $\left(\dfrac{\|u\|}{\|v\|}\right)^2 = -\dfrac{\theta(\lambda^k)}{\theta'(\lambda^k)}$. On vérifie bien que l'on obtient le même résultat que ci-dessus. 2

Comme on l'a déjà dit, ψ étant décroissante et convexe, la méthode de Newton converge globalement. Avec $\lambda^0 < \lambda^*$, la suite (λ^k) est croissante. 2