ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2002 **FILIÈRE PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Ce problème a pour but principal l'étude des coefficients diagonaux des diverses matrices semblables à une matrice donnée.

On désigne par n un entier $\geqslant 2$, par $M_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices à coefficients réels, à n lignes et n colonnes, et par I la matrice identité ; on appelle *scalaires* les matrices de la forme λI où λ est un réel. On rappelle que deux matrices A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible Q vérifiant $B = Q\,A\,Q^{-1}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans deux bases de $\mathbf{R}^n$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Si une matrice A est non scalaire, il existe un vecteur X de $\mathbf{R}^n$, non nul et non vecteur propre pour A.

b) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, i et $j \in \{1, \ldots, n\}$. Il existe une matrice B semblable à A telle que

$$b_{i,i} = a_{j,j}\ ,\ b_{j,j} = a_{i,i}\ ,\ b_{k,k} = a_{k,k} \quad \texttt{pourtoutk} \neq \texttt{i}, \texttt{j}\ .$$

Deuxième partie

2. On se donne une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ de trace nulle et on se propose de démontrer qu'il existe une matrice B semblable à A ayant tous ses coefficients diagonaux nuls.

a) Montrer que si A est non nulle, il existe une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $AX_1 = X_2$.

b) Conclure en procédant par récurrence sur n.

3. *Applications numériques.* Dans chacun des cas considérés, on indiquera une matrice B répondant à la question et une base qui lui correspond.

a) $n = 2\,,\quad A$ est diagonale avec coefficients diagonaux $1, -1$.

b) $n = 3\,,\quad A$ est diagonale avec coefficients diagonaux $1, 0, -1$.

4. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non scalaire. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux de la forme $(t, 0, \dots, 0)$, et exprimer t en fonction des coefficients diagonaux de A.

5. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non nulle. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux tous non nuls.

Troisième partie

On dira que deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont *orthosemblables* s'il existe une matrice orthogonale Q vérifiant $B = Q\,A\,Q^{-1}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans deux bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$. Pour toute matrice A on pose

$$f(A) = \sup\left\{|a_{i,i} - a_{j,j}| \ : i, j = 1, \dots, n\right\} .$$

On se donne une matrice A et on se propose de démontrer qu'il existe une matrice B, orthosemblable à A et ayant tous ses coefficients diagonaux égaux.

6. Démontrer l'assertion dans le cas où $n = 2$.

7. On suppose maintenant n quelconque et les $a_{i,i}$ non tous égaux.

a) Montrer qu'on peut supposer $f(A) = |a_{1,1} - a_{2,2}|$.

b) Construire une matrice A', orthosemblable à A et telle que

$$a'_{1,1} = a'_{2,2}\ ,\ a'_{i,i} = a_{i,i} \quad \forall i \geqslant 3 \quad , \quad |a'_{1,1} - a'_{i,i}| < f(A) \quad \forall i \geqslant 3\ .$$

c) Construire une matrice A'', orthosemblable à A et telle que $f(A'') < f(A)$.

On désigne par $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales, et par E_A celui des matrices orthosemblables à A.

8.a) Montrer que E_A est une partie compacte de $\mathbf{R}^{n^2}$.

b) Montrer que la restriction de la fonction f à E_A atteint son minimum.

c) Conclure.

9. *Application numérique.* On prend $n = 3$ et A diagonale avec coefficients diagonaux $(1, 0, 0)$; on note $A_m,\ m = 0, 1, \ldots$ les matrices successives obtenues par la méthode précédente, de sorte que

$$\mathtt{diag(A_0)} = (1,0,0)\ ,\ \mathtt{diag(A_1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\ ,\ \mathtt{diag(A_2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\ ,\ \mathtt{etc}\ .$$

Déterminer $f(A_m)$ et les coefficients diagonaux de A_m.

Quatrième partie

On munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$ et de la norme correspondante $\|\cdot\|$. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ on pose

$$R(A) = \{(AX \mid X) : \|X\| = 1\}\ .$$

10. Démontrer les assertions suivantes :

a) $R(A)$ contient les valeurs propres réelles de A ainsi que ses coefficients diagonaux.

b) $R(A)$ est un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$.

c) Si A est symétrique et de trace nulle, le nombre 0 appartient à $R(A)$.

11. Montrer que si la trace t de A appartient à $R(A)$, il existe une matrice B orthosemblable à A avec coefficients diagonaux $(t, 0, \ldots, 0)$.

Cinquième partie

On note $\mathtt{Sp(A)}$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A.

12. On se donne une matrice non nulle A de $M_n(\mathbf{R})$ et on note B une matrice semblable à A ayant tous ses coefficients diagonaux non nuls.

a) Trouver une matrice Y telle que l'on ait

$$\mathtt{Sp(Y)} = \{1\} \quad \mathtt{et} \quad \mathtt{Sp(B+Y)} \cap \mathtt{Sp(Y)} = \varnothing\ .$$

b) Construire une matrice X non nulle telle que l'on ait

$$\mathtt{Sp(A+X)} \cap \mathtt{Sp(X)} = \varnothing\ .$$

13. On désigne par T une application linéaire de $M_n(\mathbf{R})$ dans lui-même qui transforme toute matrice inversible en une matrice inversible.

a) Vérifier que l'on a
$$\mathtt{Sp}\Big(\mathtt{T(I)}^{-1}\mathtt{T(A)}\Big) \subset \mathtt{Sp(A)}\ .$$

b) Montrer que l'application T est inversible.

*   *
*

Rapport de M^{me} Thérèse MERLIER et M. Emmanuel GERMAIN, correcteurs.

Le problème a probablement surpris nombre de candidats car les résultats sont assez médiocres :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	21%
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	36%
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	31%
$12 \leq \mathrm{N} \leq 16$	7%
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	5%

Il y a 6% de notes éliminatoires (inférieures ou égales à 2 sur 20) et la moyenne s'établit à environ 7,9.

Ce que l'on peut reprocher le plus aux candidats est :
– de ne pas lire attentivement le texte,
– de manquer de rigueur,
– de ne pas savoir rédiger.

Analyse

Examinons maintenant le problème question par question.

Première Partie

1.a) Il fallait évidemment raisonner par contraposition. Cette question a été faite correctement par environ 25% des candidats, ce qui paraît bien faible pour un exercice aussi classique. De plus, il y a souvent confusion entre matrice diagonale et matrice scalaire, dont le texte redonnait pourtant la définition.

1.b) Question facile, résolue par le plus grand nombre, mais dont la rédaction est souvent laborieuse. Les matrices de transposition ne sont pas toujours connues.

Deuxième Partie

2.a) Il suffisait de remarquer qu'une matrice de trace nulle, non nulle n'est pas scalaire, et d'appliquer **1.a)**.

2.b) La récurrence a été rarement correcte, car les candidats ont cherché des bases du type $X, AX, \ldots, A^kX$.

3.) L'application numérique est faite par les candidats qui ont lu le texte : A est diagonale ; alors pourquoi essayer de résoudre avec des coefficients non diagonaux indéterminés ! Quelles pertes de temps, d'énergie et de points !

4.) et **5.)** Ces questions ont été peu résolues car il ne fallait pas appliquer brutalement le résultat du **2.)**. Ainsi, pour le **4.)** le plus simple était de considérer la matrice $A - tI$, non nulle, non scalaire, et de lui appliquer le **1.a)**. On trouve une base $(X_1, X2 \dots)$ telle que $AX_1 = tX_1 + X_2$ et on applique le **2)** à la sous matrice de A inférieure droite, d'ordre $n-1$, qui est de trace nulle.

Troisième partie

6.) Cette question n'a été faite que par quelques candidats. La plupart ont pris une matrice orthogonale $(q_{i,j})$ et après quelques calculs ont affirmé que le système obtenu avait des solutions ! !... C'est probalement au correcteur de continuer les calculs. (Cette façon de rédiger est à revoir...).

7.a) C'était bien sûr un corollaire du **1.b)**, en précisant que la matrice de passage était orthogonale, matrice de passage d'une base orthonormée à une autre. Cette dernière précision a été omise dans la moitié au moins des copies .

7.b) Le plus difficile était la preuve de l'inégalité stricte.

7.c) L'erreur la plus classique était de prendre $A' = A''$ en oubliant que $f(A)$ pouvait aussi être égal à $|\, a_{k,k} - a_{j,j} \,|$ avec $(k, j) \neq (1, 2)$. Il fallait donc itérer le procédé du **7.b)**. Cette question a souvent été abordée mais mal résolue.

8.a) L'application $Q \rightarrow QAQ^{-1}$ de $O_n(\mathcal{R})$ dans $M_n(\mathcal{R})$ a pour image E_A ; elle est continue, $O_n(\mathcal{R})$ est un compact, donc E_A est un compact. Pourquoi les candidats ont inventé de fausses applications du genre $QAQ^{-1} \rightarrow Q$ reste un mystère !, peut-être en espérant parler d'images réciproques.

<u>Le cours sur la topologie est mal su ou mal assimilé.</u>

8.b) La fonction f est continue sur un compact ... donc atteint ses bornes.

8.c) Question facile mais bien mal traitée. Le minimum de f sur E_A est zéro grâce à **7.c)**. Que de choses non rigoureuses écrites à ce propos.

9.) Question sautée dans les 9/10 des copies, ce qui est très dommage, surtout pour des PC qui devraient savoir mieux modéliser un problème.

Quatrième partie

10.a) Facile .

10.b) $R(A)$ est fermé borné comme image de la surface S de la boule unité par une fonction continue. Mais cela ne suffit pas à en faire un intervalle. S étant de plus connexe, son image l'est aussi, donc est un intervalle de $\mathcal{R}$. On pouvait faire aussi une démonstration directe.

10.c) L'hypothèse symétrique n'était pas nécessaire. Les meilleures copies en ont fait la remarque. Si la diagonale contient des éléments positifs et négatifs, $R(A)$ contient 0 puisque c'est un intervalle. Si tous les éléments diagonaux sont nuls, c'est vrai d'après **10.a)**.

11.) Très peu traitée et souvent mal.... Les candidats appliquent la question **4.)**, alors que c'est une application du **7.)**. On peut en effet construire une base orthonormée $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ telle que $(AX_1|X_1) = t$. Dans ce cas la matrice d'ordre $n-1$ inférieure droite est de trace nulle donc orthosemblable à une matrice ayant tous ses coefficients diagonaux nuls d'après **7.)**.

12.a) La solution a été trouvée par quelques candidats astucieux qui ont pensé à chercher Y de telle sorte que $B + Y$ soit triangulaire inférieure, Y n'ayant que des 1 sur la diagonale.

12.b) Traitée par tous ceux qui ont eu le temps de lire le texte. Le spectre est invariant par similitude.

13.a) Question facile mais peu traitée faute de temps.

13.b) Question facile, application directe de **12.)** et **13.a)**, mais jamais traitée.