CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE X PC 2002

Première partie

Notations : $\mathcal{C}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $A\in M_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Diag}(A)=(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$ la diagonale de A.

1. a) Raisonnement par l'absurde : on suppose que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de A.
En particulier : $\forall i\in[1..n]\quad \exists\lambda_i\in\mathbb{R}\quad Ae_i=\lambda_i e_i$. En écrivant que $X=e_i+e_j$ est aussi vecteur propre, on obtient : $AX=\mu X$ soit $\mu(e_i+e_j)=\lambda_i e_i+\lambda_j e_j$. Pour tous les i,j tels que $i\neq j$, on déduit $\mu=\lambda_i=\lambda_j$ car (e_i,e_j) est libre. Ainsi $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n$ qui prouve que A est scalaire. . . . . $\boxed{5}$

b) Si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que $A=Mat_{\mathcal{C}}(u)$ alors la matrice B est $B=Mat_{\mathcal{C}'}(u)$ où $\mathcal{C}'=(e'_k)_k$ se déduit de $\mathcal{C}$ par l'échange de e_i et e_j c'est-à-dire

$$e'_i=e_j\ ;\ e'_j=e_i\ ;\ e'_k=e_k\quad \text{si } k\notin\{i,j\}. \qquad \boxed{2}$$

Deuxième partie

2. $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A)=0$.

a) Si $A\neq 0$, A ne peut être scalaire (car $\mathrm{Tr}(\lambda I_n)=n\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0$). D'après **1.a),** il existe $X_1\in\mathbb{R}^n$ tel que X_1 et $X_2=AX_1$ sont linéairement indépendants. On complète ensuite la famille libre (X_1,X_2) en une base de $\mathbb{R}^n$. . . . . $\boxed{3}$

b) On considère : $\mathcal{P}(n)$: "toute matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A)=0$ est semblable à une matrice de diagonale nulle". $\mathcal{P}(1)$ étant évidente, on suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie pour un entier $n\geqslant 2$ et on démontre $\mathcal{P}(n)$.
Soit une matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. On suppose $A\neq 0$ (pour $A=0$, le résultat est immédiat) et on considère $\mathcal{X}=(X_1,X_2...,X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ tel que $AX_1=X_2$. Alors

$$A'=Mat_{\mathcal{X}}(u)=\begin{bmatrix}0 & L_1\\ C_1 & A_1\end{bmatrix}$$

où $C_1=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $L_1\in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $A_1\in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Les matrices semblables A et A' ont même trace, à savoir : $0=\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(A')=\mathrm{Tr}(A_1)$.
On applique ensuite $\mathcal{P}(n-1)$ à la matrice A_1 : il existe $P\in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_1P=B_1$ où $\mathrm{Diag}(B_1)=(0,0,...,0)_{n-1}$.
La matrice à blocs diagonaux $Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}$ est inversible et $Q^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P^{-1}\end{bmatrix}$.
Par produit des blocs, on vérifie que $Q^{-1}A'Q=B$ s'écrit $B=\begin{bmatrix}0 & L_2\\ C_2 & B_1\end{bmatrix}$ où $L_2=L_1P$ et $C_2=P^{-1}C_1$.
La matrice B étant à diagonale nulle, $\mathcal{P}(n)$ est démontrée. . . . . $\boxed{6}$

3. a) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ de trace nulle. $\begin{cases}u(e_1)=e_1\\u(e_2)=-e_2\end{cases}$ donc $\begin{cases}e_1'=e_1+e_2\\e_2'=e_1-e_2\end{cases}$ vérifient

$$B=Mat_{(e_1',e_2')}(u)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$ 2

b) De même, $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ conduit à $B=Mat_{(e_1',e_2',e_3')}(u)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ avec

$\begin{cases}e_1'=e_1+e_3\\e_2'=e_2\\e_3'=e_1-e_3\end{cases}$ 1

4. Soit A non scalaire et $\boxed{t=\mathrm{Tr}(A)}$.

La matrice $A_0=A-tI_n$ n'est pas scalaire et, comme en **2.a),** il existe une base $\mathcal{X}=(X_1,X_2...,X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $A_0X_1=X_2$ ce qui prouve que A_0 est semblable à $A_0'=Mat_{\mathcal{X}}(u-t\,\mathrm{Id})=\begin{bmatrix}0&L_1\\C_1&A_1\end{bmatrix}$ où

$$C_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\in M_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ L_1\in M_{1,n-1}(\mathbb{R})\text{ et }A_1\in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

En conséquence, A est semblable à $A_0'+tI_n=\begin{bmatrix}t&L_1\\C_1&B_1\end{bmatrix}$ où $B_1=A_1+tI_{n-1}$ et $t=\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(A_0'+tI_n)=t+\mathrm{Tr}(B_1)$ livre $\boxed{\mathrm{Tr}(B_1)=0}$.

On applique ensuite la question **2** à la matrice B_1 de trace nulle : ainsi, B_1 est semblable à une matrice $B_2\in M_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Diag}\,(B_2)=(0,0,...,0)_{n-1}$. Il en résulte que A est semblable à une matrice de la forme $B=\begin{bmatrix}t&L_2\\C_2&B_2\end{bmatrix}$ dont la diagonale est $(t,0,...,0)_n$

où $\boxed{t=\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}}$ 5

5. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$.

- 1^{er} *cas* : $t=\mathrm{Tr}(A)\neq 0$. La matrice $A'=A-\dfrac{t}{n}I_n$ étant de trace nulle, on la sait (d'après **2.**) semblable à une matrice $B'\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Diag}(B')=(0,0,...,0)$ et, par suite, A est semblable à la matrice $B=B'+\dfrac{t}{n}I_n$ dont la diagonale est $\left(\dfrac{t}{n},\dfrac{t}{n},...,\dfrac{t}{n}\right)$ 3
- $2^{ème}$ *cas* : $t=\mathrm{Tr}(A)=0$.
  Dans ce cas, on démontre que A est semblable à une matrice $B\in M_n(\mathbb{R})$ de la forme :
  $$B=\begin{bmatrix}\alpha&L_1\\C_1&B_1\end{bmatrix}$$
  avec $\alpha\neq 0$, $L_1\in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C_1\in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $B_1\in M_{n-1}(\mathbb{R})$.
  Pour cela, on considère un vecteur $X_1\in\mathbb{R}^n$ tel que $AX_1\neq 0$ (X_1 existe car $A\neq 0$).
  * Soit (X_1,AX_1) est liée : on peut écrire $AX_1=\alpha X_1$ où $\alpha\neq 0$ puisque ces deux vecteurs sont non nuls.
  On complète alors en $\mathcal{X}$ =$(X_1,X_2,...X_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ et $B=Mat_{\mathcal{X}}(u)$ est de la forme désirée avec $C_1=0_{1,n-1}$.

* Soit (X_1, AX_1) est libre : en considérant $X_2 = X_1 - AX_1$, on obtient une famille libre (X_1, X_2) que l'on complète en $\mathcal{X} = (X_1, X_2, ...X_n)$ base de $\mathbb{R}^n$.
Comme $AX_1 = X_1 - X_2$, la matrice $B = Mat_{\mathcal{X}}(u)$ est de la forme voulue avec $\alpha = 1$ et $C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on remarque que $0 = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = \alpha + \mathrm{Tr}(B_1)$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(B_1) = -\alpha \neq 0}$ et on applique la méthode du 1^{er}*cas* à la matrice B_1 : ainsi, B_1 est semblable à une matrice B_1' dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Par la méthode employée au **2.b),** on déduit que B (donc A) est semblable à une matrice B' de la forme requise :

$$B' = \begin{bmatrix} \alpha & L_1' \\ C_1' & B_1' \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0, L_1' \in M_{1,n-1}(\mathbb{R}), C_1' \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et B_1' d'éléments diagonaux $\neq 0$. . . $\boxed{7}$
Remarque : il y a plus simple. A est non scalaire (sinon $A = 0$, $n \geqslant 2$).
$A - I_n$ est semblable à B' de diagonale $(-n, 0, 0, \ldots, 0)$
A est semblable à $B = B' + I_n$ de diagonale $(-n+1, 1, 1, \ldots, 1)$ c.q.f.d.

Troisième partie

6. $n = 2$. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ de trace $t = a + d$. On fait le calcul du produit des trois matrices $A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et on exprime l'égalité des termes sur la diagonale :

$$(a-d)\cos 2\theta = (b+c)\sin 2\theta.$$

Si $a = d$ il n'y avait rien à faire.
Si $a - d \neq 0$ on prend $\operatorname{cotan} 2\theta = \dfrac{b+c}{a-d}$. Comme la trace de A' est égale à la trace de A alors A' répond à la question. . . . . $\boxed{4}$

7. a) $f(A)$ est la borne sup d'un ensemble fini donc un maximum : il existe deux entiers i, j nécessairement distincts tels que $f(A) = |a_{ii} - a_{jj}| > 0$. En échangeant e_i et e_1, e_j et e_2 , on obtient une base orthonormée $\mathcal{C}' = (e_k')_k$ telle que $A' = Mat_{\mathcal{C}'}(u)$ vérifie $f(A') = f(A) = |a_{11}' - a_{22}'|$.
Comme A' est orthosemblable à A, on peut démontrer la propriété cherchée sur A' au lieu de A, ce qui revient à supposer que $f(A) = |a_{11} - a_{22}| > 0$. . . . . $\boxed{2}$
Remarque : soient i et j tels que $a_{ii} = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \{a_{kk}\}$ et $a_{jj} = \min\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \{a_{kk}\}$, on peut se ramener au cas où $a_{22} = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \{a_{kk}\}$ et $a_{11} = \min\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \{a_{kk}\}$ et on a, dans ces conditions,

$$f(A) = a_{22} - a_{11} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1..n\} \quad a_{kk} \in [a_{11}, a_{22}]$$

b) La question **6.** montre que la matrice extraite $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est orthosemblable à une matrice $B_1 = \begin{bmatrix} \lambda & b_{12} \\ b_{21} & \lambda \end{bmatrix}$ où $\boxed{\lambda = \dfrac{\mathrm{Tr}(A_1)}{2} = \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}}$. Ceci donne l'existence d'une base orthonormée $c' = (e_1', e_2')$ du plan $P = Vect(e_1, e_2)$ telle que $Mat_{c'}(u_1) = B_1$ où $u_1 = p_1 \circ u \in \mathcal{L}(P)$ (p_1 désignant la projection orthogonale sur la plan P).

On considère $\mathcal{C}'=(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ définie par e'_1, e'_2 et $e'_i = e_i$ si $i \geqslant 3$. On a

$$A' = Mat_{\mathcal{C}'}(u) = \begin{bmatrix} B_1 & L_1 \\ C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

où $L_1 \in M_{2,n-2}(\mathbb{R})$, $C_1 \in M_{n-2,2}(\mathbb{R})$ et $A_2 \in M_{n-2}(\mathbb{R})$.
On constate que les éléments diagonaux de la matrice A_2 sont les $a_{ii} = u(e'_i)\cdot e'_i = u(e_i)\cdot e_i = a_{ii}$ où $i = 3..n$. Donc A' est orthosemblable à A et vérifie $\boxed{a'_{11} = a'_{22} = \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2} \text{ et } a'_{ii} = a_{ii} \text{ si } i \geqslant 3.}$ .... $\boxed{3}$

Par ailleurs, avec $a_{22} = \max\limits_{k\in[\![1,n]\!]}\{a_{kk}\}$ et $a_{11} = \min\limits_{k\in[\![1,n]\!]}\{a_{kk}\}$ (cf. remarque du **7.a**) on a pour tout $i \geqslant 3$, $\quad a_{ii} \in [a_{11}, a_{22}]$ et par conséquent

$\boxed{\forall i \geqslant 3 \quad \left|a_{ii} - \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2}\right| \leqslant \dfrac{f(A)}{2} < f(A).}$ .... $\boxed{4}$

c) La matrice A' de la question **7.b)** est telle que :

$$f(A') = \max_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a'_{ii} - a'_{jj}| = \max_{3\leqslant i<j\leqslant n}|a_{ii} - a_{jj}| \leqslant f(A).$$

- Si $f(A') < f(A)$ alors la matrice $A'' = A'$ convient.
- Si $f(A') = f(A) > 0$ (donc $n \geqslant 4$) on réitère la construction de la question **7b)** sur la matrice $A_2 \in M_{n-2}(\mathbb{R})$ extraite de A (cf. notations de **7b)**). On construit une matrice A'_2 orthosemblable à A_2 puis une matrice $A'' = \begin{bmatrix} B_1 & L'_1 \\ C'_1 & A'_2 \end{bmatrix}$ orthosemblable à A telle que $f(A'') = \max\limits_{5\leqslant i<j\leqslant n}|a_{ii} - a_{jj}| \leqslant f(A)$. ($f(A'') = 0$ si $n = 4$)
  L'algorithme s'arrêtant au bout d'un nombre fini p d'étapes (au plus $E(n/2)$) on est sûr de trouver une matrice $A^{(p)}$ orthosemblable à A telle que $f(A^{(p)}) < f(A)$. .... $\boxed{5}$

8. a) Considérons l'application $\varphi_A \ : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ Q & \longmapsto & {}^tQ\,A\,Q \end{cases}$ qui est continue par continuité d'une application bilinéaire en dimension finie et l'ensemble $E_A = \{Q^{-1}AQ/Q \in O_n(\mathbb{R})\} = \{{}^tQAQ/Q \in O_n(\mathbb{R})\} = \varphi_A(O_n(\mathbb{R}))$.
Or l'ensemble $\underline{O_n(\mathbb{R})\text{ est compact}}$ en tant que fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie :

- **fermé** car $O_n(\mathbb{R}) = \{Q \in M_n(\mathbb{R})/\,{}^tQQ = I_n\} = \varphi_{I_n}^{-1}(I_n)$ image réciproque par une application continue d'un fermé.
- **borné** car $\forall Q \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|Q\|_\infty = \max\limits_{i,j}|q_{ij}| \leqslant 1$ (les vecteurs colonnes sont de norme quadratique 1).

En conclusion, $\underline{E_A = \varphi_A(O_n(\mathbb{R}))\text{ est compact car image continue d'un compact.}}$ $\boxed{3}$

b) L'application f est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ car composée, différence d'applications continues :

- les projections $p_i \ : M \longrightarrow m_{ii}$ sont continues (linéaires en dimension finie),
- la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$,
- l'application max $: (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \longrightarrow \max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ ce qui s'explique par récurrence sur p en remarquant que

$$\max(\alpha_1,\alpha_2) = \tfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \left|\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right| \quad \text{et} \quad \max(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p) = \max(\max(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{p-1}),\alpha_p). \quad \boxed{3}$$

Il en résulte que f est bornée sur le compact E_A et atteint ses bornes.
Remarque : écrire que l'application f_{E_A} atteint son minimum est un pléonasme!

c) On désigne par A_0 l'une des matrices de E_A telle que $f(A_0) = \min_{A' \in E_A} f(A')$. Si les coefficients diagonaux de A_0 ne sont pas tous égaux, on peut appliquer à A_0 l'algorithme de la question **7** et construire une matrice A_0'' orthosemblable à A_0 (donc orthosemblable à A) telle que $f(A_0'') < f(A_0) \leqslant f(A)$. C'est contradictoire avec la définition de A_0.
Conclusion : $B = A_0$ est orthosemblable à A et ses éléments diagonaux sont tous égaux. 2

9. *Application numérique :* l'algorithme de la question **7.** conduit à :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour par exemple : } \begin{cases} e_1' = (e_1 + e_2)/\sqrt{2} \\ e_2' = (e_1 - e_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

puis en opérant sur la matrice extraite : $A_1' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on obtient la matrice orthosemblable à A_1' :

$$A_1'' = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & ? & ? \\ ? & 1/4 & 1/4 \\ ? & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

On réitère le procédé sur A_2 qui vérifie $f(A_2) = \frac{1}{4} = |a_{11} - a_{22}|$ d'où $a_{11}' = a_{22}' = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{3}{8}$ et $a_{33}' = \frac{1}{4}$.

m	$\mathrm{Diag}(A_m)$	$f(A_m)$
0	$(1, 0, 0)$	1
1	$(1, 1, 0)/2$	$1/2$
2	$(2, 1, 1)/4$	$1/4$
3	$(3, 3, 2)/8$	$1/8$
4	$(6, 5, 5)/16$	$1/16$

Il semble que $\boxed{f(A_m) = \frac{1}{2^m}}$ et que, **pour** m **pair,** $\mathrm{Diag}(A_m) = \frac{1}{2^m}(\alpha_m, \beta_m, \beta_m)$ avec $\alpha_m = \beta_m + 1$ et, par conservation de la trace, $\alpha_m + 2\beta_m = 2^m$. On trouve ainsi que $\boxed{\alpha_m = \frac{2^m + 2}{3} \text{ et } \beta_m = \frac{2^m - 1}{3}}$ soit $\mathrm{Diag}(A_m) = \frac{1}{3.2^m}(2^m + 2, 2^m - 1, 2^m - 1)$ qui conduit à

$$\mathrm{Diag}(A_{m+1}) = \frac{1}{2^m}\left(\frac{\alpha_m + \beta_m}{2}, \frac{\alpha_m + \beta_m}{2}, \beta_m\right).$$

D'où les formules suivantes que l'on vérifie par récurrence :

$$\boxed{\mathrm{Diag}(A_m) = \frac{1}{3.2^m}(2^m + 2, 2^m - 1, 2^m - 1) \quad \text{si} \quad m\,\text{pair}}$$

$$\boxed{\mathrm{Diag}(A_m) = \frac{1}{3.2^m}(2^m + 1, 2^m + 1, 2^m - 2) \quad \text{si} \quad m\,\text{impair}}$$ 5

On constate bien que $\boxed{f(A_m) = \frac{1}{2^m} \text{ pour tout } m}$. 2

Quatrième partie

10. $R(A) = \{(AX|X) \ : X \in S\}$ où S désigne la sphère unité pour la norme $\|.\|$.

a) Soit λ une valeur propre réelle de A : il existe un vecteur propre X associé. Quitte à le normaliser, on peut supposer que $X \in S$ et alors,

$$(AX|X) = \lambda(X|X) = \lambda \in R(A). \qquad \boxed{1}$$

Si $(e_i)_i$ désigne toujours la base canonique (qui est orthonormée) de $\mathbb{R}^n$, on a $(Ae_i|e_i) = a_{ii} \in R(A)$. .... $\boxed{1}$

b)
- S étant compacte (fermée bornée en dimension finie), l'ensemble $R(A)$ est compact puisque image de S par l'application continue $\phi \ : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longrightarrow & (AX|X) \end{array} \right.$.
  Ainsi, $R(A)$ est fermé borné. .... $\boxed{2}$
- S est connexe par arcs, en effet, si X_1 et X_2 sont dans S alors
  - si $X_1 + X_2 \neq 0$ on prend $f(t) = \dfrac{(1-t)X_1 + tX_2}{\|(1-t)X_1 + tX_2\|}$ qui est une fonction continue de $[0,1]$ dans S telle que $f(0) = X_1$ et $f(1) = X_2$.
  - Si $X_1 = -X_2$, on prend $X_3 \notin \{X_1, X_2\}$ (ce qui est toujours possible sur la sphère en dimension $\geqslant 2$) et on relie X_1 à X_3 puis X_3 à X_2.

  Comme $R(A)$ est l'image par ϕ d'un ensemble connexe par arcs, $R(A)$ est connexe par arcs. .... $\boxed{4}$

Conclusion : $R(A)$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Remarque : cette question peut aussi se démontrer à l'aide des matrices symétriques. On commence par démontrer que lorsque A est symétrique, $R(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont les valeurs propres extrèmales de A (se prouve en réduisant la forme quadratique associée à A). Pour A quelconque, on considère $A^+ = \dfrac{(A + {}^tA)}{2}$ la partie symétrique de A et on remarque que $R(A) = R(A^+)$ puisque $(A^+X|X) = \frac{1}{2}\left[{}^t(AX)X + {}^t({}^tAX)X\right] = (AX|X)$.

c) *Dans cette question, la symétrie de A ne sert pas.*
Le segment $R(A)$ contient (d'après **10.a)**) tous les a_{ii} où $1 \leqslant i \leqslant n$ donc contient leur moyenne $\dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Lorsque $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on déduit que $0 \in R(A)$. . $\boxed{2}$

11. $t = \mathrm{Tr}(A) \in R(A)$ donc s'écrit $t = (AX_1|X_1)$ où $X_1 \in S$. On peut compléter par $X_2, X_3, ...X_n$ de telle façon que $\mathcal{X} = (X_i)_i$ soit un base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Si u désigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A, on obtient :

$$A' = Mat_{\mathcal{X}}(u) = \begin{bmatrix} t & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix}$$

où $C_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Ainsi, A et A' sont orthosemblables et $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A) = t + \mathrm{Tr}(A_1)$ donc $\mathrm{Tr}(A_1) = 0$. La troisième partie a démontré que A_1 est orthosemblable à une matrice B_1 de diagonale nulle ce qui prouve l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{X}' = (X'_i)_i$ telle que $B = Mat_{\mathcal{X}}(u) = \begin{bmatrix} t & L'_1 \\ C'_1 & B_1 \end{bmatrix}$.

Donc A est orthosemblable à cette matrice B de diagonale $(t, 0, 0, ..., 0)$. .... $\boxed{5}$

Cinquième partie

12. a) D'après **5.** A est semblable à une matrice $B=(b_{ij})_{ij}$ telle que $\forall i \in [1..n]\ b_{ii} \neq 0$.

On considère la matrice triangulaire supérieure $Y = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & -b_{ij} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ce qui s'écrit encore $\begin{cases} y_{ij} = -b_{ij} & \text{si } i<j \\ y_{ii} = 1 & \\ y_{ij} = 0 & \text{si } i>j \end{cases}$. La matrice $B+Y$ est triangulaire inférieure avec $\operatorname{Diag}(B+Y) = (1+b_{11}, 1+b_{22}, ..., 1+b_{nn})$.

Les spectres (réels ou complexes) sont $\operatorname{Sp}(Y) = \{1\}$ et $\operatorname{Sp}(B+Y) = \{1+b_{ii}\ : 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Ils sont disjoints car les b_{ii} sont non nuls. 5

b) Par définition de B, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Par suite, la matrice $X = P^{-1}YP$ vérifie $A + X = P^{-1}(B+Y)P$ donc $\operatorname{Sp}(X) = \operatorname{Sp}(Y)$ et $\operatorname{Sp}(A+X) = \operatorname{Sp}(B+Y)$. 2

13. $T \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})\ T(A) \in GL_n(\mathbb{R})$.

a) Pour λ réel, on a :

$$\begin{aligned}\det(T(I_n)^{-1}T(A) - \lambda I_n) &= \det(T(I_n)^{-1}\left[T(A) - \lambda T(I_n)\right]) \\ &= \det(T(I_n)^{-1}) \det(T(A) - \lambda T(I_n)) \\ &= \det(T(I_n))^{-1} \det(T(A - \lambda I_n)) \text{ car } T \text{ est linéaire.}\end{aligned}$$

Il en résulte que si λ est dans le spectre réel de $T(I_n)^{-1}T(A)$ alors $\det(T(I_n)^{-1}T(A) - \lambda I_n) = 0$ donc $\det(T(A - \lambda I_n)) = 0$.

Comme la matrice $A - \lambda I_n$ ne peut être inversible, on en déduit que λ est dans le spectre réel de A. Donc $\boxed{\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I_n)^{-1}T(A)) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)}$ 4

b) *Erreur d'énoncé...du moins pour n pair.*

Pour démontrer que T est inversible, il suffit de prouver que son noyau est réduit à $\{0\}$ puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace-vectoriel de dimension finie.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ **non nulle** telle que $T(A) = 0$. On peut lui appliquer les résultats de la question **12.** à savoir l'existence d'une matrice non nulle $X \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Sp}(A+X) \cap \operatorname{Sp}(X) = \emptyset$.

Précision : pour les matrices triangulaires Y et $B+Y$ (donc également pour X et $A+X$) le spectre réel et le spectre complexe sont confondus.

D'après **13.a)**

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I_n)^{-1}T(X)) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(X) \text{ et } \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I_n)^{-1}T(A+X)) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A+X).$$

Or $T(A+X) = T(A) + T(X) = T(X)$ ce qui conduit à

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I_n)^{-1}T(X)) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A+X) \cap \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(X) = \emptyset$$

On arrive à une contradiction si on prouve que le **spectre réel** $T(I_n)^{-1}T(X)$ est non vide ce qui est vrai pour n impair.

Mais pour n pair, **l'application T n'est pas nécessairement inversible** comme le prouve le contre-exemple suivant (pour $n=2$).

$$T : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$ 8