

SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

PRÉAMBULE

Le but du problème est de prouver dans certains cas particuliers, la conjecture explicitée ci-après, souvent nommée conjecture d'Ilieff-Sendov et démontrée en 2003 par GERALD SCHMIEDER.

On rappelle le théorème de d'Alembert-Gauss qui dit que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a une racine dans \mathbb{C} .

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes, de degré au moins égal à 2, z une racine de S :

- On dit que S et z vérifient (IS) s'il existe une racine ζ du polynôme dérivé S' de S vérifiant $|z - \zeta| \leq 1$.
- On dit que S vérifie (IS) si, pour toute racine z de S , S et z vérifient (IS).

Le théorème d'Ilieff-Sendov est que tout polynôme de degré au moins égal à 2 et dont les racines sont de module au plus 1, vérifie (IS).

Dans toute la suite, on fixe un entier $n \geq 2$ et un polynôme $P = a_n X^n + \dots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$, de degré n . On note z_0, z_1, \dots, z_m les racines distinctes de P (ainsi m est un entier tel que $0 \leq m \leq n$) : pour $i = 0, \dots, m$, on note n_i la multiplicité de z_i . On a donc

$$P = a_n \prod_{i=0}^m (X - z_i)^{n_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^m n_i = n.$$

On suppose que les z_i vérifient $|z_i| \leq 1$.

PARTIE I : QUELQUES CAS SIMPLES DU THÉORÈME

- I.1.** a. Prouver que si $n = 2$ alors P vérifie (IS).
b. Prouver que si $n_0 \geq 2$ alors P et z_0 vérifient (IS).
- I.2.** a. Montrer qu'il existe des nombres complexes w_1, \dots, w_m non racines de P tels que

$$P' = n a_n \prod_{i=0}^m (X - z_i)^{n_i - 1} \prod_{j=1}^m (X - w_j).$$

- b. On suppose que $n_0 = 1$, trouver une relation entre

$$\prod_{j=1}^m (z_0 - w_j) \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^m (z_0 - z_j).$$

- c. Prouver que, si on a $n \geq 2^m$, alors P vérifie (IS) (on distinguera les cas $n_0 = 1$ et $n_0 \geq 2$).

- d. À l'aide de la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$, montrer que w_j est un barycentre à coefficients strictement positifs des z_i et que l'on a $|w_j| \leq 1$.
En déduire que si $z_0 = 0$ alors P et z_0 vérifient (IS).

Pour la suite de cette partie, on écrit $P' = n a_n \prod_{i=1}^{n-1} (X - t_i)$ où les t_i sont des nombres complexes. On suppose en outre que $n_0 = 1$.

- I.3. a.** Prouver que si l'on a $\left| \frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} \right| \geq n - 1$ alors P et z_0 vérifient (IS).
- b.** Calculer $\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$ à l'aide des z_i (on pourra utiliser le polynôme $\frac{P}{X - z_0}$).
- I.4. a.** Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ alors

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - z} \right) \geq \frac{1}{2}.$$

- b.** On suppose que $z_0 = 1$ et on range les t_i de sorte que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - t_1} \right) \geq \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - t_i} \right) \text{ pour } i = 1, \dots, n - 1.$$

Prouver que l'on a

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - t_1} \right) \geq 1 \text{ puis } |t_1 - 1| \leq 1.$$

- I.5.** On suppose z_0 de module 1. Prouver que P et z_0 vérifient (IS) (utiliser une transformation géométrique simple de \mathbb{C}).

PARTIE II : CAS D'UNE RACINE RÉELLE

Dans toute cette partie, on suppose que $n_0 = 1$ et que z_0 est un nombre réel a vérifiant $0 < a < 1$.

Pour $w \in \mathbb{C} \setminus \{1/a\}$, on pose $T(w) = \frac{w - a}{aw - 1}$.

On note \tilde{P} le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$\tilde{P}(X) = (aX - 1)^n P \left(\frac{X - a}{aX - 1} \right),$$

et on écrit $\tilde{P}(X) = b_n X^n + \dots + b_0$ où les b_i sont dans \mathbb{C} .

- II.1.** Calculer $T \circ T(w)$ pour $w \in \mathbb{C} \setminus \{1/a\}$, et trouver l'image par T du cercle unité, de son intérieur, et de son extérieur privé du point $1/a$.

- II.2.** Prouver que l'on a $b_0 = 0$, $|b_1| \leq |b_n|$ et $|b_{n-1}| \leq (n - 1)|b_n|$.

On pose

$$R(X) = \sum_{i=1}^n \left[(n - i)b_i X^i + \frac{ib_i}{a} X^{i-1} \right]$$

et on écrit $R(X) = A \prod_{k=1}^{n-1} (X - \gamma_k)$ où $A \neq 0$ et où les γ_k sont rangés de telle sorte que

$$|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots \leq |\gamma_{n-1}|.$$

- II.3.** Comparer

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \text{ et } \frac{1}{n - a(n - 1)}.$$

- II.4.** Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{1/a\}$, calculer $P'(T(w))$ en fonction de a , w et $R(w)$.

II.5. Soit μ un nombre réel tel que $|\gamma_1| \leq \mu < \frac{1}{a}$. Prouver que P' a une racine ζ vérifiant

$$|\zeta - a| \leq \frac{\mu(1 - a^2)}{1 - a\mu}.$$

Si $\mu \leq \frac{1}{1 + a - a^2}$, prouver que P' a une racine ζ vérifiant $|\zeta - a| \leq 1$.

II.6. a. Montrer que, pour $n \in \{3, 4\}$, $\frac{1}{n - a(n - 1)} \leq \frac{1}{(1 + a - a^2)^{n-1}}$ (étudier la fonction $x \mapsto \ln(n - x(n - 1)) - (n - 1)\ln(1 + x - x^2)$).

b. En déduire que si $n \leq 4$ alors P et a vérifient (IS).

Montrer que, si $n \leq 4$ alors, pour toute racine z de P de module compris strictement entre 0 et 1, P et z vérifient (IS).

II.7. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré 3 ou 4, ayant toutes ses racines de module au plus 1 vérifie (IS).

II.8. On suppose qu'on a $n = 5, 6$ ou 7 et que P a une racine double au moins et de module 1. Montrer que P et a vérifient (IS) (étudier la fonction $x \mapsto (n - 2)\ln(1 + x - x^2) - \ln[n - (n - 1)x]$).

II.9. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré 5, 6 ou 7, ayant une racine double au moins et de module 1, et toutes ses autres racines de module au plus 1, vérifie (IS).

PARTIE III : CONTINUITÉ DES RACINES D'UN POLYNÔME

On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus n . On définit une norme sur $\mathbb{C}[X]$ par

$$\|S\| = \left\| \sum_{i=0}^n s_i X^i \right\| = \sum_{i=0}^n |s_i|.$$

On ne demande pas de prouver que ceci est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

III.1. Prouver que si $S \in \mathbb{C}[X]$ est de degré n , toute racine z de S dans \mathbb{C} vérifie $|z| \leq \frac{\|S\|}{|s_n|}$ (on distinguera les cas $|z| \leq 1$ et $|z| > 1$).

III.2. Soit (S_k) une suite de polynômes de degré n qui converge vers S , de degré n , dans $\mathbb{C}_n[X]$, lorsque $k \rightarrow +\infty$. On pose $S_k = \alpha_k \prod_{i=1}^n (X - x_{i,k})$. Soit z une racine de S dans \mathbb{C} et p sa multiplicité.

Si $\varepsilon > 0$ on veut montrer que, pour k assez grand, p au moins des nombres complexes $x_{i,k}$ ($i = 1, \dots, n$) sont à distance au plus ε de z .

a. Montrer que l'ensemble des $\{x_{i,k}, i \in [1, n], k \in \mathbb{N}\}$ est borné.

b. Soit z une racine de S d'ordre p , $\varepsilon > 0$ et D le disque de centre z , de rayon ε . On range les racines de S_k de sorte que

$$|x_{1,k} - z| \leq |x_{2,k} - z| \leq \dots \leq |x_{n,k} - z|.$$

Montrer par l'absurde que $|x_{p,k} - z| < \varepsilon$ pour k assez grand et conclure

PARTIE IV : POLYNÔMES EXTRÉMAUX

Soit k un entier vérifiant $n \geq k + 1 \geq 2$. On note $P_n(k)$ la partie de $\mathbb{C}_n[X]$ formée des polynômes *unitaires* de degré n ayant au plus $k + 1$ racines distinctes, toutes de module au plus 1.

Pour $S \in P_n(k)$ et pour z racine de S , on note $I_S(z)$ la plus courte distance de z aux racines de S' . On note $I(S)$ le plus grand des $I_S(z)$ quand z parcourt l'ensemble des racines de S .

- IV.1.** a. Montrer qu'on a $I(S) \leq 2$ pour $S \in P_n(k)$ et qu'il existe un polynôme S de $P_n(n - 1)$ tel que $I(S) = 1$.
 b. On note $I(P_n(k))$ la borne supérieure des $I(S)$ quand S parcourt $P_n(k)$.
 Montrer que, si on a $I(P_n(k)) \leq 1$ alors tout polynôme de $P_n(k)$ vérifie (IS).
 Montrer que $I(P_n(n - 1)) \geq 1$.

- IV.2.** a. Prouver que $P_n(k)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}_n[X]$.
 b. Montrer que $I : S \mapsto I(S)$ est une application continue de $P_n(k)$ dans \mathbb{R} et qu'il existe un polynôme S de $P_n(k)$ vérifiant $I(S) = I(P_n(k))$.

On appelle *polynôme extrémal* de $P_n(k)$ un polynôme S de $P_n(k)$ vérifiant $I(S) = I(P_n(k))$.

- IV.3.** Prouver qu'un polynôme extrémal de $P_n(k)$ a une racine de module 1 (utiliser une transformation géométrique simple de \mathbb{C}).

- IV.4.** Prouver que, pour tout nombre réel θ , un polynôme extrémal de $P_n(k)$ a au moins une racine de la forme $e^{i\alpha}$ où $\alpha \in [\theta, \theta + \pi[$.

- IV.5.** On suppose que $n = 5, 6$ ou 7 et $k = 3$. On note S un polynôme extrémal de $P_n(k)$ et on suppose que S a une racine a réelle vérifiant $0 < a < 1$.

Prouver que S et a vérifient (IS) (dans le cas où S a exactement 2 zéros distincts u et v de module 1, on pourra prouver que leur somme est nulle et établir la majoration

$$|a - \zeta|^k \leq \frac{2^{k-2}}{n} |a - u| \cdot |a - v|$$

où ζ est la racine de S' la plus proche de a).

- IV.6.** On suppose que $n = 5, 6$ ou 7 . Prouver que l'on a $I(P_n(3)) \leq 1$.

- IV.7.** Prouver que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ayant au plus 4 racines distinctes, ces racines étant de module au plus 1, vérifie (IS).