SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Partie I : quelques cas simples de la conjecture $\boxed{39}$

I.1. a. On a donc $P = a_2(X - z_1)(X - z_2)$ et $P' = 2a_2 - 2\left(X - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$ or

$$\left|z_1 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right| \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{2} \leqslant 1.$$

On fait de même pour z_2 et donc P vérifie (IS). .... $\boxed{2}$

b. Dans le cas où $n_0 \geqslant 2$, z_0 est aussi racine de P' donc P et z_0 vérifient (IS)........ $\boxed{1}$

I.2. a. On dérive P sous forme factorisée, on obtient

$$\begin{aligned} P'(x) &= a_n \sum_{i=0}^{m} n_i (X - z_i)^{n_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - z_j)^{n_j} \\ &= n a_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{n_i - 1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{m} n_i \prod_{j \neq i} (X - z_j)\right]. \end{aligned}$$

Le polynôme $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{m} n_i \prod_{j \neq i} (X - z_j)$ est unitaire et de degré m, on peut donc l'écrire sous la forme $\prod_{j=1}^{m} (X - w_j)$ où les w_j ne sont pas racines de P (sinon si $w_j = z_i$ alors z_i serait racine d'ordre $n_i + 1$ de P). .... $\boxed{3}$

b. On reprend l'expression précédente avec $n_0 = 1$ et on substitue z_0 à x, on a

$$P'(z_0) = a_n \prod_{j=1}^{m} (z_0 - z_i)^{n_i} = n a_n \prod_{i=1}^{m} (z_0 - z_i)^{n_i - 1} \prod_{j=1}^{n} (z_0 - w_j)$$

et donc $\prod_{j=1}^{m} (z_0 - w_j) = \dfrac{1}{n} \prod_{j=1}^{m} (z_0 - z_i)$. .... $\boxed{4}$

c. Soit $n \geqslant 2^m$ et $n_0 = 1$, on a alors

$$\left|\prod_{j=1}^{n} (z_0 - w_j)\right| = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{m} |z_0 - z_j| \leqslant \frac{2^m}{n} \leqslant 1$$

ce qui prouve que l'un au moins des $|z_0 - w_j|$ est inférieur ou égal à 1............ $\boxed{4}$

Si $n_0 \geqslant 2$ alors on sait (**I.1.b.**) que P et z_0 vérifient (IS). .... $\boxed{1}$

Comme on peut faire ce même raisonnement avec toutes les autres racines de P on peut conclure : P vérifie (IS).

d. On sait que $\dfrac{P'}{P} = \sum_{i=0}^{m} \dfrac{n_i}{X - z_i}$ .... $\boxed{1}$

donc, en substituant w_j à X on obtient

$$\frac{P'(w_j)}{P(w_j)} = 0 = \sum_{i=0}^{m} \frac{n_i}{w_j - z_i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{n_i}{|w_j - z_i|^2} \overline{(w_j - z_i)}.$$

On prend alors le conjugué et on obtient bien le résultat. . . . . $\boxed{3}$

Comme tous les z_i sont dans le disque unité, il en est de même des w_j. . . . . $\boxed{1}$

Enfin, si $z_0 = 0$, on distingue plusieurs cas :

- Si $n_0 \geqslant 2$ alors P et 0 vérifient (IS). . . . . $\boxed{1}$
- Si $n_0 = 1$ alors on utilise le résultat que l'on vient de prouver et $|0 - w_j| \leqslant 1$. $\boxed{2}$

I.3. a. On a $\dfrac{P''(X)}{P'(X)} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{X - t_i}$ et, vu que $n_0 = 1$, z_0 n'est pas racine de P', on a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|z_0 - t_i|} \geqslant \left| \frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} \right| \geqslant n - 1$$

donc l'un des termes de la première somme est nécessairement supérieur ou égal à 1 i.e. $\exists t_i \in [1, n-1]$ tel que $|z_0 - t_i| \leqslant 1$ et, par conséquent, P et z_0 vérifient (IS). . $\boxed{3}$

b. On pose $Q = \dfrac{P}{X - z_0}$ alors $Q = a_n \prod\limits_{i=1}^{m} (X - z_i)^{n_i}$ d'où

$$\frac{Q'(z_0)}{Q(z_0)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{X - z_0}.$$

Or $P' = (X - z_0)Q' + Q$, $P'' = (X - z_0)Q'' + 2Q'$ et donc on a $P'(z_0) = Q(z_0)$, $P''(z_0) = 2Q'(z_0)$ d'où

$$\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} = 2\frac{Q'(z_0)}{Q(z_0)} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{z_0 - z_i}. \qquad \boxed{4}$$

I.4. a. On écrit $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leqslant r < 1$ ce qui donne

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \geqslant \frac{1 - r\cos\theta}{2 - 2r\cos\theta} = \frac{1}{2}. \qquad \boxed{2}$$

b. On reprend le résultat du **I.3.b.**

$$\frac{P''(1)}{P'(1)} = 2\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{1 - z_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - t_i}$$

d'où les inégalités

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t_1}\right) \geqslant \frac{1}{n-1} \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-t_i}\right) = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{m} n_i \,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z_i}\right)$$

$$\geqslant \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{2} = 1 \text{ grâce à la question précédente}$$

et donc $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-t_1}\right) \geqslant 1$. . . . . $\boxed{4}$

On a alors immédiatement $\dfrac{1}{|1 - t_1|} \geqslant 1$ et $|1 - t_1| \leqslant 1$. . . . . $\boxed{1}$

I.5. Si z_0 est de module 1, on l'écrit $z_0 = e^{i\theta}$, on pose alors $P_1(X) = P(e^{i\theta}X)$. P_1 admet 1 comme racine simple donc P_1 et 1 vérifient (IS). Les racines de P_1' sont les $e^{-i\theta}t_j$ et donc s'il existe j tel que $|1 - e^{-i\theta}t_j| \leqslant 1$ alors, pour ce même j, on a $|z_0 - t_j| \leqslant 1$.

Conclusion : P et z_0 vérifient bien (IS). . . . . $\boxed{2}$

Partie II : Cas d'une racine réelle 41

II.1. Par un calcul aisé, on trouve $T^2(w) = w$ pour $w \neq 1/a$ et on vérifie que $T(w) \neq 1/a$. 1

$$
\begin{aligned}
|T(re^{i\theta})|^2 - 1 &= \frac{(re^{i\theta} - a)(re^{-i\theta} - a)}{(are^{i\theta} - 1)(are^{-i\theta} - 1)} \\
&= \frac{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta - (a^2r^2 + 1 - 2ar\cos\theta)}{|are^{i\theta} - 1|^2} \\
&= \frac{(r^2 - 1)(1 - a^2)}{|are^{i\theta} - 1|^2}
\end{aligned}
$$

Donc, si $\mathbb{U}$ désigne le cercle unité, alors $T(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ et comme $T^2(\mathbb{U}) = \mathbb{U} \subset \mathbb{U}$ on obtient $T(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. 3

La même égalité permet de vérifier que l'intérieur du cercle unité est stable par T, de même que son extérieur privé de $1/a$. 3

On peut aussi utiliser la connexité par arc : si $D = D(0, 1)$ alors $T(D)$ est connexe par arc donc $T(D) \subset D$ ou $T(D) \subset D^c$.

II.2. Comme $\widetilde{P}(X) = (aX - 1)^n P(T(X))$, les racines de $\widetilde{P}$ sont les $\tilde{z}_i = T^{-1}(z_i) = T(z_i)$ et on conserve l'ordre de multiplicité. Ces racines, comme on vient de le voir, sont aussi de module inférieur ou égal à 1. Comme $T(a) = 0$, alors $\tilde{z}_0 = 0$ est racine et donc $b_0 = 0$. 1

Puis, les relations entre coefficients et racines d'un polynôme nous assurent que

$$\left|\prod_{i=1}^{m} \tilde{z}_i^{\,n_i}\right| = \left|\frac{b_1}{b_n}\right| \leqslant 1$$

et

$$\left|\sum_{i=1}^{m} n_i \tilde{z}_i\right| = \left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} n_i = n - 1. \qquad 4$$

II.3. Le coefficient constant de $R(X)$ vaut $\dfrac{b_1}{a}$ et le coefficient de X^{n-1} vaut $\dfrac{nb_n}{a} + b_{n-1}$. Cette dernière expression est non nulle car $|b_{n-1}| \leqslant (n-1)|b_n|$. On a donc

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \leqslant \left|\frac{b_1}{nb_n + ab_{n-1}}\right| \leqslant \frac{|b_1|}{n|b_n| - a|b_{n-1}|} \leqslant \frac{1}{n - a(n-1)} \qquad 3$$

II.4. Attention, ici, on calcule le polynôme dérivé en $T(w)$!

On part de la relation $P(T(X)) = \dfrac{\widetilde{P}(X)}{(aX-1)^n}$ et on dérive :

$$
\begin{aligned}
P'(T(X))T'(X) &= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} ib_i X^{i-1}\right)(aX - 1) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i X^i\right) na}{(aX-1)^{n+1}} \\
&= \frac{-a}{(aX-1)^{n+1}} R(X).
\end{aligned}
$$

Comme $T'(X) = \dfrac{a^2 - 1}{(aX-1)^2}$ on obtient

$$P'(T(w)) = \frac{a}{1 - a^2} \frac{R(w)}{(aw - 1)^{n-1}}. \qquad 4$$

On remarque en particulier que les racines de P' sont les transformées par T des racines de R.

II.5. Si x et y sont des nombres complexes distincts de $\dfrac{1}{a}$ alors

$$|T(x)-T(y)| = \frac{(1-a^2)|y-x|}{|ax-1|.|ay-1|}.$$

D'où, en prenant $x=0$, $y=\gamma_1$ et en posant $\zeta = T(\gamma_1)$, on a

$$|a-T(\gamma_1)| = \frac{(1-a^2)|\gamma_1|}{|a\gamma_1-1|} \leqslant \frac{\mu(1-a^2)}{1-a\mu}$$

car $|a\gamma_1-1| \geqslant 1-a|\gamma_1| \geqslant 1-a\mu > 0$. Enfin, on remarque que ζ est racine de P'. . . . $\boxed{3}$

Si $\mu < \dfrac{1}{1+a-a^2}$ (et donc $\mu < \dfrac{1}{a}$) on a

$$\frac{\mu(1-a^2)}{1-a\mu} \leqslant 1 \Rightarrow |\zeta - 1| \leqslant 1.$$ $\boxed{1}$

II.6. a. Étudions la fonction $\varphi(x) = \ln(n-x(n-1)) - (n-1)\ln(1+x-x^2)$ sur $]0,1[$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{(n-1)}{n-x(n-1)} - \frac{(n-1)(1-2x)}{1+x-x^2}\\ &= -\frac{n-1}{[n-x(n-1)](1+x-x^2)}(x-1)[x(2n-3)-(n+1)]\end{aligned}$$

φ' s'annule donc pour $x=1$ et $x = \dfrac{n+1}{2n-3}$ et cette dernière valeur est supérieure à 1 pour $n \leqslant 4$ et donc, comme $\varphi'(0) > 0$ et que $\varphi(1) = 0$, on en déduit que $\varphi(x)$ est positif pour $x \in]0,1[$. . . . . $\boxed{3}$

b. Vu la question **II.3**, on a donc

$$|\gamma_1|^{n-1} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1}|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{n-a(n-1)} \leqslant \frac{1}{(1+a-a^2)^{n-1}}$$

i.e. $|\gamma_1| \leqslant \dfrac{1}{1+a-a^2}$ ce qui permet de choisir μ comme à la question précédente et de conclure. . . . . $\boxed{3}$

Dans le cas général, on fait une rotation comme au **I.5** et on arrive à la même conclusion. . . . . $\boxed{1}$

II.7. Soit P un polynôme de degré 3 ou 4 et z_0 une racine de P.

- Si $n_0 \geqslant 2$ alors, d'après I.1.b., P et z_0 vérifient (IS).
- Si $n_0 = 1$ et $|z_0| = 1$, P et z_0 vérifient (IS) d'après I.5.
- Si $n_0 = 1$ et $|z_0| = 0$ alors P et z_0 vérifient (IS) d'après I.2.d.
- Si $n_0 = 1$ et $0 < |z_0| < 1$ alors, d'après la question précédente, P et z_0 vérifient (IS).

Conclusion : en vertu de l'étude exhaustive que l'on vient de faire, on peut dire qu'en effet, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 alors il vérifie (IS). . . . . $\boxed{4}$

II.8. On étudie donc $\psi(x) = (n-2)\ln(1+x-x^2) - \ln[n-(n-1)x]$ alors

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{(n-2)(1-2x)(n-(n-1)x)+(n-1)(1+x-x^2)}{(1+x-x^2)(n-(n-1)x)}\\ &= \frac{[(n-1)(2n-5)x^2-(3n^2-8n+3)x+n^2-n-1}{(1+x-x^2)(n-(n-1)x)} = \frac{T_n(x)}{D_n(x)}\end{aligned}$$

On vérifie alors que T_n, trinôme du numérateur, ne s'annule pas pour $n = 5,\ 6,\ 7$:
En effet, $T_n(x) = ax^2 - bx + c \geqslant T_n(\frac{b}{2a}) = \dfrac{3n^2 - 8n + 3}{2(n-1)(2n-5)} = t_n$ et $t_5 = \dfrac{1159}{4}$, $t_6 = \dfrac{4085}{4}$, $t_7 = \dfrac{15709}{6}$.
ψ est donc décroissante et, comme $\psi(1) = 0$, alors $\psi(x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$. . . . . $\boxed{2}$
Soit z_0 le zéro double au moins, de module 1. z_0 est aussi racine de P' et donc $T(z_0)$ est une racine du polynôme R (défini au **II.2.**). On a donc $T(z_0) = \gamma_i$ où γ_i est une racine de module 1.
On a alors

$$|\gamma_1|^{n-2} \leqslant \prod_{k=1,k\neq i}^{n-1} |\gamma_k| = \prod_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \leqslant \frac{1}{n - a(n-1)} \leqslant \frac{1}{(1 + a - a^2)^{n-2}}$$

et donc $\gamma_1 \leqslant \dfrac{1}{1 + a - a^2}$ et on applique le **II.5.** . . . . $\boxed{3}$

II.9. Le raisonnement précédent s'étend par rotation au cas où a est un zéro simple et où $|a| \in]0, 1[$. On peut alors conclure comme à la question précédente. . . . . $\boxed{2}$

Partie III : Continuité des racines d'un polynôme $\boxed{13}$

III.1. Soit z une racine de S, si $|z| \leqslant 1$, l'inégalité est évidente car $\|S\| \geqslant s_n$. . . . . $\boxed{0}$
Si $|z| > 1$ alors

$$|z|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |s_i| \geqslant |s_0 + \cdots + s_{n-1} z^{n-1}| = |s_n z^n| \text{ d'où}$$

$$\|S\| \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} |s_i| \geqslant |s_n|.|z|$$

ce qui termine la démonstration. . . . . $\boxed{3}$

III.2. a. Soit $s_{n,k}$ le coefficient (non nul) de X^n dans S_k. Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n,k} = s_n \neq 0$ alors la suite $\left(\dfrac{\|S_k\|}{|s_{n,k}|}\right)$ est convergente donc bornée.
Vu l'inégalité prouvée à la question précédente, on en déduit que l'ensemble des $\{x_{i,k},\ i \in [1, n],\ k \in \mathbb{N}\}$ est borné. . . . . $\boxed{2}$

b. Par l'absurde, on suppose que pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant k_0$ tel que $|z - x_{i,k}| \geqslant \varepsilon$ pour $i \geqslant p$. On peut alors construire une suite extraite $\big(S_{\varphi(k)}\big)$ telle que l'on ait cette propriété.
Si on considère la suite $\big((x_{1,\varphi(k)}, \ldots, x_{n,\varphi(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ alors elle appartient à un fermé borné de $\mathbb{C}^n$ donc compact. On peut alors en extraire une suite convergente $\big((x_{1,\varphi\circ\psi(k)}, \ldots, x_{n,\varphi\circ\psi(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et soit $(y_1, \ldots, y_n)$ sa limite.
Or, comme $S_{\varphi\circ\psi(k)} = s_{n,\varphi\circ\psi(k)} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_{\varphi\circ\psi(k)})$ admet pour limite $S = s_n \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - y_i)$ ceci prouve qu'au moins p des nombres y_i sont égaux à z_i. Or ceci est impossible car, par construction, $|y_i - z| \geqslant \varepsilon$ pour $i \geqslant p$. . . . . $\boxed{8}$

PARTIE IV : POLYNÔMES EXTRÉMAUX 25

IV.1. a. Les racines de S' sont dans l'enveloppe convexe des racines de S (résultat du I.2.d.), elles sont donc de module au plus 1. Les racines z de S et z' de S' étant dans le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 vérifient $|z-z'| \leqslant 2$. Donc, pour tout z, on a $I_S(z) \leqslant 2$ et, en conséquence $I(S) \leqslant 2$. 2

b. Évident, il suffit de revenir à la définition. 0

Pour montrer l'inégalité, il suffit de trouver un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $I(P) = 1$.

Or $P(X) = X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(X - e^{2ik\pi/n})$ répond à la question. 2

IV.2. a. Comme on est en dimension finie, il suffit de prouver que $P_n(k)$ est fermé borné.

$P_n(k)$ borné : comme toutes les racines de $S \in P_n(k)$ sont de module inférieur ou égal à 1, on sait alors que $|\sigma_k| \leqslant \binom{n}{k}$ car cette fonction symétrique des racines de S est la somme de $\binom{n}{k}$ termes tous produits de k racines de S.

On a donc $\|S\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\sigma_k| \leqslant 2^n$. 1

$P_n(k)$ est fermé : on utilise le résultat du III, soit $S \in \mathbb{C}_n(X]$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min_{z\neq z'} |z - z'|$ où z et z' sont les racines de S. On suppose que S a $p+1$ racines distinctes.

Soit $(S_h)_{h\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $P_n(k)$ convergeant vers S.

On remarque tout d'abord que S est unitaire. il reste à prouver que S a au plus $k+1$ racines distinctes. Si l'on prend h suffisamment grand alors les racines des polynômes S_h seront partitionnées dans les disques $D(z, \varepsilon/2)$ et donc S_h aura au moins $p+1$ racines distinctes. On a donc $p \leqslant k$ et $S \in P_n(k)$. 3

Conclusion : $P_n(k)$ est compact.

b. On utilise le critère séquentiel de continuité. Soit $(S_h)_{h\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $P_n(k)$ convergeant vers S. Comme $\|S'_h - S'\| \leqslant n\|S_h - S\|$, la suite (S'_h) converge vers S'. On va utiliser le résultat prouvé à la question précédente, on prend $a > 0$ tel que les disques centrés sur les racines de S (respectivement S'), de rayon a soient disjoints. Soit $\varepsilon > 0$ inférieur à a. Dans chaque disque $D(z, \varepsilon)$, il y a q racines de S_h (pour $h \geqslant h_0$) si q désigne l'ordre de multiplicité de z dans S. Et, si on choisit h_0 suffisamment grand, ce sera pareil pour S'_h et S'.

Soit z une racine de S, il existe une racine de S_h, z_h telle que $|z - z_h| \leqslant \varepsilon$. Soit z'_h racine de S' telle que $|z_h - z'_h| = I_{S_h}(z_h)$ et enfin z' racine de S' telle que $|z'_h - z'| \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$I_S(z) \leqslant |z - z'| \leqslant |z_h - z'_h| + 2\varepsilon \leqslant I(S_h) + 2\varepsilon$$

pour toute racine z de S donc

$$I(S) \leqslant I(S_h) + 2\varepsilon.$$

De la même façon, en partant de z_h racine de S_h (pour h suffisamment grand), on lui associe z racine de S, puis z' racine de S' telle que $|z - z'| = I_S(z)$ et enfin z'_h racine de S'_h telle que $|z' - z'_h| \leqslant \varepsilon$, on obtient

$$I(S_h) \leqslant I(S) + 2\varepsilon.$$

Les deux inégalités ainsi obtenues permettent d'affirmer que I est continue. 5

Enfin, $P_n(k)$ étant un compact, I est bornée sur $P_n(k)$ et y atteint ses bornes, il existe donc un polynôme P de $P_n(k)$ tel que $I(P) = I(P_n(k)$. 0

IV.3. Supposons que le polynôme extrémal S a toutes ses racines de module inférieur strictement à 1. Soit $r \in]0,1[$ tel que le disque $D(0,r)$ contienne toutes les racines de S alors le polynôme $S_r = \dfrac{1}{r^n}S(rX)$ est aussi un élément de $P_n(k)$ et vu que $I(S) = rI(S_r)$ alors S n'est pas extrémal, d'où la conclusion. 2

IV.4. Supposons que pour $\theta \in \mathbb{R}$ le polynôme extrémal S n'ait aucune racine de la forme $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [\theta, \theta+\pi[$ alors on peut trouver une translation $z \mapsto z - a$ telle que le polynôme $S(X-a)$ ait toutes ses racines dans le disque ouvert $D(0,1)$ (un petit dessin est suffisamment explicite). Le polynôme $S(X-a)$ est aussi un polynôme extrémal de $P_n(k)$ et il a toutes ses racines dans $D(0,1)$ ce qui contredit le résultat de la question **IV.3**. 2

Conclusion : S possède au moins deux racines de module 1 et si S posséde exactement deux racines de module 1 alors elles sont forcément opposées.

IV.5. Si a est racine double de S alors $I_S(a) = 0$, si S a une racine double de module 1, le **II.8** permet de conclure. 0

On suppose donc maintenant que a est racine simple et que toutes les racines de S de module 1 sont simples elles aussi. D'aprés le **IV.4**, il y a au moins 2 racines de module 1 (et qui seront simples), on les note (comme le préconise l'énoncé) u et v. Comme $\deg S \geqslant 5$ on sait alors qu'il existe une autre racine b d'ordre $n-3 \geqslant 2$ et qui ne peut être de module 1. u et v sont donc opposées.

S s'écrit donc sous la forme :

$$S = (X-a)(X-u)(X-v)(X-b)^{n-3}$$

et donc

$$S' = n(X-b)^{n-4}(X-t_1)(X-t_2)$$

d'où, d'une part en dérivant S comme le produit de $(X-a)$ par $(X-u)(X-v)(X-b)^{n-3}$, d'autre part, en utilisant le résultat précédent, on obtient

$$S'(a) = (a-u)(a-v)(a-b)^{n-3} = n(a-b)^{n-4}(a-t_1)(a-t_2)(a-t_3).$$

Si ζ est la racine de S' la plus proche de a alors

$$\begin{aligned} n|a-\zeta|^3.|a-b|^{n-4} &\leqslant |a-u|.|a-v|.|a-b|^{n-3} \\ n|a-\zeta|^3 &\leqslant |a-u|.|a-v|.|a-b| \leqslant 2|a-u|.|a-v|. \end{aligned}$$

Mais, en posant $u = e^{i\theta}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |a-u|^2.|a-v|^2 = |a^2-u^2|^2 = |a^2 - e^{2i\theta}|^2 &= a^4 - 2a^2\cos 2\theta + 1 \\ &\leqslant a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2+1)^2 \end{aligned}$$

et, en conclusion

$$|a-\zeta|^3 \leqslant \frac{2}{n}(a^2+1) \leqslant \frac{2}{5}(a^2+1) < \frac{4}{5}$$

car $n \geqslant 5$ et donc $|a-\zeta| < 1$. 5

Par rotation, comme on l'a déjà fait, on étend ce résultat à toute racine de S dont le module est strictement compris entre 0 et 1. 1

IV.6. On procède comme au **II.7**, en distinguant pour une racine z_0 d'ordre n_0, les cas $n_0 \geqslant 2$, $n_0 = 1$ et $|z_0| = 1$, $n_0 = 1$ et $z_0 = 0$, $n_0 = 1$ et $0 < |z_0| < 1$ (cas que l'on vient de traiter. Conclusion : $I(S) = I(P_n(3)) \leqslant 1$. 1

IV.7. On vient de voir que si $\deg S \leqslant 7$ et si S a au plus 4 racines distinctes, alors S vérifie (IS) (pour $n = 5$, 6 ou 7, c'est le résultat de la question précédente, pour $n = 4$, on utilise le **II.7**).

Si $n \geqslant 8 = 2^3$ alors la réponse est donnée dans la question **I.2.c.**. . . . . $\boxed{1}$