SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ, NORMES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

N.B. : *Les 3 parties sont indépendantes à l'exception de l'inégalité (5) utilisée dans les parties* ***II*** *et* ***III***.
Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$ *et on notera* I *l'intervalle* $[0,1]$.

Φ désigne une application **continue**, positive ou nulle, de I dans $\mathbb{R}$.

f et g sont des applications positives ou nulles, **continues par morceaux** de I dans $\mathbb{R}$.

Partie I

On définit une application F de I dans $\mathbb{R}$ en posant, si $x \in I$:

$$F(x) = \int_0^1 f(tx)\Phi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

I.1. Montrer que F est bornée.
Montrer que $x \mapsto xF(x)$ est continue sur $]0,1]$ et que F admet une limite à droite en 0 (utiliser l'uniforme continuité de Φ sur $[0,1]$).
Montrer que si f est croissante (au sens large) sur I, F l'est également. Énoncer un résultat analogue lorsque f est décroissante sur I.

I.2. Établir avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz la relation :

$$\forall t \in]0,1],\ \left[\int_0^1 f(tx)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{t}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

I.3. Si $\displaystyle\int_0^1 \frac{\Phi(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ désigne la limite de $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{\Phi(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ quand $\varepsilon \to 0^+$ (résultat que l'on ne demande pas de redémontrer), montrer les deux relations :

$$\left[\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x.\left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right]^2, \tag{2}$$

$$\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.\left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right]^2. \tag{3}$$

(Pour établir (2) on pourra utiliser le théorème de Fubini en prenant des fonctions f et g continues par morceaux, faire ensuite intervenir une intégrale double sur un domaine à préciser et utiliser la fonction auxiliaire $G(t) = \sqrt{t}\displaystyle\int_0^1 f(tx)g(x)\,\mathrm{d}x$.)

I.4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on note v_p, $p = 1, 2, \ldots, n$, des réels tels que $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots \geqslant v_n \geqslant 0$. On définit sur I une fonction en escalier f en posant :

$$f(t) = \begin{cases} v_1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ v_p & \text{si } \dfrac{p-1}{n} < t \leqslant \dfrac{p}{n}, \quad p = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Φ est une fonction continue positive ou nulle, définie sur I. F désigne la fonction définie par la relation (1) à partir de f et de Φ.

Montrer que :

$$\forall p,\ p=1,2,\dots,n,\quad F\left(\frac{p}{n}\right)=\sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire l'inégalité :

$$\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left[\sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right]^2. \tag{4}$$

I.5. Déduire des questions **I.3** et **I.4** l'inégalité :

$$\sum_{p=1}^{n}\left[\sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right]^2 . \sum_{q=1}^{n} v_q^2. \tag{5}$$

Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites de réels $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ converge.

II.1. Montrer que $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel et que $\|u\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2}$ est bien une norme associée à un produit scalaire.

On définit la suite $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $w_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n} u_p$ et on s'intéresse à l'application linéaire $A\ : u\in\mathcal{U}\mapsto w\in\mathcal{U}$. On va prouver que A est bien un endomorphisme de $\mathcal{U}$, que A est continue et enfin, on déterminera $\|A\|$.

II.2. Montrer l'inégalité :

$$\sum_{p=1}^{n} w_p^2 \leqslant 4\sum_{p=1}^{n} u_p^2,\quad n=1,2,\dots. \tag{6}$$

Pour cela, on pourra procéder comme suit :

a. Démontrer d'abord (6) en supposant la suite (u_n) décroissante (au sens large) et à termes positifs ou nuls. On utilisera le **I.5**.

b. Montrer ensuite (6) en supposant seulement la suite (u_n) à termes positifs ou nuls. On introduira à cet effet, pour n donné, $n\geqslant 2$, les n réels $v_1,v_2,\dots,v_n$, définis par :
- $v_1=u_{\sigma(1)}=\sup\{u_i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$;
- $v_2=u_{\sigma(2)}=\sup\{u_i \mid 1\leqslant i\leqslant n \text{ et } i\neq\sigma(1)\}$;
- $v_3=u_{\sigma(3)}=\sup\{u_i \mid 1\leqslant i\leqslant n \text{ et } i\neq\sigma(1), i\neq\sigma(2)\}$, etc.

où σ désigne une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$.

c. Démontrer enfin (6) pour une suite quelconque.

II.3. Montrer que A est bien un endomorphisme continu de $\mathcal{U}$.

II.4. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$x_n=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2-\frac{1}{4n},\quad n=1,2,\dots.$$

Étudier le signe de x_n et la convergence de la série de terme général x_n.

II.5. Soit n_0 un entier fixé ($n_0 \geqslant 2$). Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par les relations :

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant n_0 \\ 0 & \text{si } n > n_0, \end{cases} \qquad b_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} a_p.$$

Déterminer explicitement les valeurs prises par b_n. Déterminer un réel α strictement positif, indépendant de n_0, tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 + \alpha.$$

Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour cet entier n_0, on ait l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \geqslant \frac{4\alpha}{\varepsilon}.$$

II.6. Calculer $\|A\|$.

II.7. Prouver que $U \mapsto \|AU\|$ est bien une norme sur $\mathcal{U}$.
Est-elle équivalente à $\|.\|$?

Partie III

Ici, on note $\mathcal{U}'$ le demi-cône de $\mathcal{U}$ formé des suites à termes positifs ou nuls, décroissantes au sens large.

$\mathcal{U}'^*$ désigne l'ensemble des suites non nulles de $\mathcal{U}'$.

À toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{U}'$ on associe la suite $z = B(u) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_n = \frac{1}{n^2}\sum_{q=1}^{n}\left(q - \frac{1}{2}\right) u_q.$$

On veut ici déterminer $\mathcal{B}$ la borne supérieure des nombres $\dfrac{\|B(u)\|}{\|u\|}$ pour $\|u\| \neq 0$.

III.1. À l'aide de la partie **I**, montrer que :

$$\sum_{p=1}^{n} z_p^2 \leqslant \frac{4}{9}\sum_{p=1}^{n} u_p^2, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

III.2. Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ est convergente, il en est de même de la série $\sum z_n^2$.

III.3. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par la relation :

$$y_n = \left(6n\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{2n-1}\right)^2 - \frac{9}{4n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Étudier le signe de y_n (on pourra prouver que $y_n \geqslant 9x_n$) et la convergence de $\sum y_n$.

III.4. Soit n_0 un entier fixé ($n_0 \geqslant 1$). On définit les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les relations :

$$c_n = \begin{cases} 6n\dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{2n-1} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant n_0 \\ 0 & \text{si } n > n_0, \end{cases} \qquad d_n = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\left(p - \frac{1}{2}\right) c_p.$$

Montrer que : $\forall n = 1, 2, \ldots \quad c_n \geqslant c_{n+1} \geqslant 0$, et que, pour $1 \leqslant n \leqslant n_0$: $d_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (on prouvera et utilisera l'inégalité $1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1} \leqslant \displaystyle\int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$).

Montrer qu'il existe un réel β strictement positif, indépendant de n_0, tel que, pour tout entier n_0, on ait l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \leqslant \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 + \beta$.

III.5. Déterminer $\mathcal{B}$.