SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SUR LES NORMES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Partie I

I.1. On utilise les majorations suivantes :

$$\forall t \in I,\ \Phi(t) \leqslant \|\Phi\|_\infty \text{ et } \forall (t,x) \in I^2,\ f(tx) \leqslant \|f\|_\infty$$

donc $|F(x)| \leqslant \|\Phi\|_\infty . \|f\|_\infty$ et par conséquent F est bornée. .... $\boxed{1}$

Continuité sur $]0,1]$: soit $a \in]0,1[$, on va prouver la continuité de $xF(x)$ sur $[a,1]$ en supposant $f \neq 0$ (sinon $F = 0$ est continue).

Par changement de variable, on a $xF(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\Phi(t/x)\,\mathrm{d}t$, on suppose pour la suite que $x' < x$. On majore $|xF(x) - x'F(x')|$ par

$$\left| \int_0^{x'} f(t)[\Phi(\frac{t}{x}) - \Phi(\frac{t}{x'})]\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{x'}^{x} f(t)\Phi(\frac{t}{x'})\,\mathrm{d}t \right|.$$

Or Φ est uniformément continue sur $[0,1]$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid |u - v| \leqslant \eta \Rightarrow |\Phi(u) - \Phi(v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|},$$

d'où, si $x - x' \leqslant a^2\eta$ alors

$$\left| \frac{t}{x} - \frac{t}{x'} \right| \leqslant t\frac{x - x'}{xx'} \leqslant \frac{x - x'}{a^2} \leqslant \eta.$$

Par conséquent : $\forall t \in [0, x'], |\Phi(t/x) - \Phi(t/x')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|}$ donc

$$\left| \int_0^{x'} f(t)[\Phi(\frac{t}{x}) - \Phi(\frac{t}{x'})]\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}x' \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On utilise ensuite l'inégalité :

$$\left| \int_{x'}^{x} f(t)\Phi(t/x)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \|f\|.\|\Phi\|.|x - x'|$$

et on prend $\eta = \inf(a^2\eta, \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|.\|\Phi\|})$ d'où, si $x - x' \leqslant \eta$,

$$\left| \int_{x'}^{x} f(t)\Phi(\frac{t}{x'})\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient en conclusion $|xF(x) - x'F(x')| \leqslant \varepsilon$.

On a ainsi prouvé l'uniforme continuité de $xF(x)$ sur $[a,1]$ pour tout $x \in]0,1]$ donc F est continue sur $]0,1]$. .... $\boxed{6}$

On vérifie que F admet une limite en 0^+. En effet

$$\begin{aligned}\left| F(x) - f(0^+)\int_0^1 \Phi(t)\,\mathrm{d}t \right| &= \int_0^1 |f(tx) - f(0^+)|\Phi(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|\Phi\|_\infty \int_0^1 |f(tx) - f(0^+)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et on exploite la continuité à gauche de f en 0

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ 0 < x \leqslant \eta,\ \forall t \in]0,1],\ |f(tx) - f(0^+)| \leqslant \varepsilon$$

donc $\left| F(x) - f(0^+) \displaystyle\int_0^1 \Phi(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$ soit $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x) = f(0^+) \int_0^1 \Phi(t)\,\mathrm{d}t$.

On peut alors conclure que F est continue sur $]0,1]$ et continue par morceaux sur $[0,1]$ 2

De plus, on démontre facilement que si f est monotone alors F l'est également et ces deux fonctions ont même sens de variation. 1

I.2. On sait que $\left[\displaystyle\int_0^1 f(tx)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f^2(tx)\,\mathrm{d}x . \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) et en posant $u = tx$ dans la première intégrale on obtient :

$$\int_0^1 f^2(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^t f^2(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{t}\int_0^1 f^2(u)\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\forall t \in]0,1],\ \left[\int_0^1 f(tx)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{t}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad 3$$

I.3. Par Fubini, on a :

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(tx)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\Phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

En posant $G(t) = \sqrt{t}\displaystyle\int_0^1 f(tx)g(x)\,\mathrm{d}x$ alors l'inégalité du **I.2.** nous donne

$$G(t) \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x . \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = M^2 \qquad 3$$

posons maintenant

$$h(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^1 f(tx)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 G(t)\frac{\Phi(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

On sait alors que h est continue en 0 et que

$$h(\varepsilon) \leqslant M\int_\varepsilon^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

on obtient l'inégalité demandée en passant à la limite quand ε tend vers 0. 4

Pour l'inégalité (3), on prend $g = F$ qui est continue par morceaux (cf. **I.1**) ; si $\displaystyle\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors l'inégalité est immédiate, sinon, on divise l'inégalité ainsi obtenue par $\displaystyle\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x$. 3

I.4. En décomposant l'intégrale, on a

$$F\left(\frac{p}{n}\right) = \int_0^1 f\left(t\frac{p}{n}\right)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{q=1}^{p}\int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} f\left(t\frac{p}{n}\right)\Phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $f(t\frac{p}{n}) = v_q$ car, pour $\dfrac{q-1}{p} < t \leqslant \dfrac{q}{p}$, on a $\dfrac{q-1}{n} < \dfrac{pt}{n} \leqslant \dfrac{q}{n}$ donc et la formule s'en déduit immédiatement. 3

Comme $f \searrow$, $F \searrow$ et donc : $\displaystyle\int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n}F^2(\frac{p}{n})$; l'inégalité demandée s'obtient alors en additionnant les n inégalités obtenues et en remplaçant $F(\frac{p}{n})$ par l'expression ci-dessus. 3

I.5. On a alors l'encadrement

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left[\sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.\left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right]^2.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{p=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} v_p^2$ ce qui donne l'inégalité

$$\sum_{p=1}^{n}\left[\sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right]^2.\sum_{q=1}^{n} v_q^2. \tag{5}$$

4

Partie II

II.1. On reconnaît ici $\mathcal{U} = \ell^2$ qui est un espace de Hilbert (le fait que les indices commencent à 1 n'est pas un problème).

- Montrons que $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$:
  - $\mathcal{U} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{U}$.
  - Si $(u,v) \in \mathcal{U}^2$ alors $|u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ entraîne que $\sum u_n v_n$ converge. Comme $(u_n + \lambda v_n)^2 = u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \lambda^2 v_n^2$ alors $\sum (u_n + \lambda v_n)^2$ converge ce qui signifie que $u + \lambda v \in \mathcal{U}$.

  Conclusion : $\mathcal{U}$ est bien un sous-espace vectoriel. 3
- Montrons que $\mathcal{U}$ est préhilbertien :
  - $(u|v) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ est bien défini (vu ce que l'on a fait ci-dessus).
  - $(u,v) \mapsto (u|v)$ est bilinéaire symétrique.
  - $(u|u) \geqslant 0$ immédiat.
  - $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

  Conclusion : $\mathcal{U}$ est préhilbertien et $\|.\|$ est la norme euclidienne associée. 3

II.2. **a.** Dans l'inégalité (5), on prend $\Phi = 1$ et $v_q = u_q$; en remarquant que $\displaystyle\int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}$ et que $\displaystyle\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right)^2 = 4$, on obtient l'inégalité (6). 2

b. Si on pose $w'_p = \frac{1}{p}\sum_{q=1}^{p} u_{\sigma(q)}$ alors $w_p \leqslant w'_p$.

En effet, $u_{\sigma_1} \geqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} u_i = u_{\tau_1}$, puis on prouve par l'absurde que $u_{\sigma_2} \geqslant \sup_{i \neq \tau_1} u_i = u_{\tau_2}$ et par récurrence $u_{\sigma_p} \geqslant u_{\tau_p}$. L'inégalité du dessus s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{n} w_p^2 \leqslant \sum_{p=1}^{n} (w'_p)^2 \leqslant 4\sum_{p=1}^{n} u_{\sigma(p)}^2 = 4\sum_{p=1}^{n} u_p^2$$

c.q.f.d. 4

c. On écrit cette fois que $|w_p| \leqslant \frac{1}{p}\sum\limits_{q=1}^{p}|u_q| = w''_p$; le résultat du b s'écrit alors ici :

$$\sum_{p=1}^{n} w_p^2 \leqslant \sum_{p=1}^{n}(w''_p)^2 \leqslant 4\sum_{p=1}^{n}|u_p|^2 = 4\sum_{p=1}^{n}u_p^2$$

c.q.f.d. .... $\boxed{3}$

II.3. Si $u \in \mathcal{U}$, comme $\sum\limits_{p=1}^{n} w_p^2 \leqslant 4\|u\|^2$, on en déduit que $w \in \mathcal{U}$. Comme $A(u) = w$ et que A est bien évidemment linéaire, A est un endomorphisme de $\mathcal{U}$. Comme $\|A(u)\| \leqslant 2\|u\|$, A est continue et on a même $\|A\| \leqslant 2$. .... $\boxed{2}$

II.4. On a d'une part $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$ donc en prenant les inverses et en multipliant par l'expression conjuguée, on a $x_n > 0$. .... $\boxed{1}$
D'autre part :

$$\begin{aligned} x_n &= \left[\sqrt{n} - \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^2 - \frac{1}{4n} \\ &= n\left[\frac{1}{2n} - O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 - \frac{1}{4n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge (en fait, on a $x_n \sim \frac{1}{8n^2}$). .... $\boxed{3}$
On pouvait aussi dire que

$$x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right)^2 - \frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n}$$

en minorant n par $n-1$, x_n est alors majorée par une série télescopique.

II.5. D'une part on a $\begin{cases} b_n &= \dfrac{1}{\sqrt{n}} \text{ si } n \leqslant n_0 \\ b_n &= \dfrac{\sqrt{n_0}}{n} \text{ si } n \geqslant n_0 \end{cases}$ (et donc la série des b_n^2 converge). .... $\boxed{2}$
D'autre part $\sum\limits_{n=1}^{n_0} a_n^2 - \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{n_0} b_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} x_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \alpha$ ($x_n > 0$) donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{n_0} a_n^2 \leqslant \alpha + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{n_0} b_n^2 \leqslant \alpha + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2. \qquad \boxed{3}$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2$ diverge ($(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2 \sim \frac{1}{4n}$) donc $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant n_0$, $\sum\limits_{n=1}^{p}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2 \geqslant M$; il suffira de prendre $M = \frac{4\alpha}{\varepsilon}$. .... $\boxed{3}$

II.6. On a vu au II.3. que $\|A\| \leqslant 2$.
Montrons que $\|A\| = 2$: en effet, prenons la suite (a_n) définie précédemment alors

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2} \geqslant 4 - \frac{4\alpha}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2} \geqslant 4 - \varepsilon$$

pour tout ε donc $\|A\| = 2$. .... $\boxed{4}$

II.7. On a $\|A(\lambda u)\| = |\lambda|.\|u\|$ et $\|A(u+v)\| \leqslant \|A(u)\| + \|A(v)\|$ par linéarité de A. Il reste à prouver que $\|A(u)\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ce qui est une conséquence de l'injectivité de A qui se prouve par récurrence. .... $\boxed{2}$

On a déjà $\|A(u)\| \leqslant 2\|u\|$ vu la question précédente.

Soit $u^{(p)} = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$, $\|u^{(p)}\| = 1$ et $Au = (0, \dots, 0, \dfrac{1}{p}, \dots, \dfrac{1}{p+k}, \dots)$ donc

$$\|Au^{(p)}\| = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+k)^2}\right)^{1/2} \to 0.$$

Conclusion : ces deux normes ne sont pas équivalentes. .... $\boxed{5}$

Partie III

III.1. On veut que $\displaystyle\int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{q-1/2}{p^2}$, $\Phi(t) = t$ répond à la question et comme

$$\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$$

et alors (7) est immédiat. .... $\boxed{4}$

III.2. Évident. .... $\boxed{0}$

III.3. En majorant $2n-1$ par $2n$, on a $y_n \geqslant \left[6n\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2n}\right]^2 - \dfrac{9}{4n} = 9x_n > 0$. .... $\boxed{2}$

On a aussi $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ et $(2n-1)^2 = 4n^2\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ donc

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{36n^2}{4n^2(1+O(1/n))}\left[n\left(\frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] - \frac{9}{4n} \\ &= \frac{9}{4n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{9}{4n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ converge (là encore, on a $y_n \sim \dfrac{27}{8n^2}$). .... $\boxed{4}$

III.4. On a tout d'abord $c_n \geqslant c_{n+1} \Leftrightarrow n\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2n-1} \geqslant (n+1)\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1}$ (pour $n \leqslant n_0 - 1$), on multiplie par les conjugués et on réduit au même dénominateur :

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(2n^2 + n) \geqslant (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(2n^2 + n - 1)$$

inégalité triviale. Et si $n \geqslant n_0$ on a $c_n \geqslant c_{n+1}$. .... $\boxed{3}$

On remarque ensuite que $(p - \dfrac{1}{2})c_p = 3p(\sqrt{p} - \sqrt{p-1})$ d'où

$$\sum_{p=1}^{n} (p - \frac{1}{2})c_p = 3n\sqrt{n} - 3(1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1})$$

or comme la fonction $\sqrt{x}$ est croissante on a

$$1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1} \leqslant \int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2n\sqrt{n}}{3}$$

donc $d_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.. $\boxed{3}$

De même qu'au **II**, on aura :

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n^2 - \frac{9}{4}\sum_{n=1}^{n_0} d_n^2 \leqslant \sum_{n=1}^{n_0}\left(c_n^2 - \frac{9}{4n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \beta$$

(on a utilisé la majoration $-d_n^2 \leqslant -\dfrac{1}{n}$). Comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} c_n^2$ et que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n^2$ converge (on utilise le III.2 en prenant $u_n = c_n$), on pourra bien écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \leqslant \frac{9}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 + \beta \qquad \boxed{2}$$

III.5. D'une part $\mathcal{B}$ est bien majoré par $\dfrac{2}{3}$; d'autre part, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(6n\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2n-1}\right)^2$ diverge (son terme général est équivalent à $\dfrac{9}{4n}$), donc on peut reprendre l'argument du **II** et pour n_0 assez grand :

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n^2}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n^2} \geqslant \frac{4}{9} - \varepsilon.$$

La borne supérieure de $\mathcal{B}$ sera donc $\dfrac{2}{3}$.. $\boxed{3}$