## SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

### Première partie $\boxed{14}$

**1.** Soit $v = \underbrace{\pi(v)}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in F^\perp}$ la décomposition du vecteur $v$ sur la somme directe $E = F \oplus F^\perp$. Si un couple $(u, \lambda)$ satisfait les conditions requises alors $u \in F$, $u + \lambda v \in F^\perp$, $(u + \lambda v|v) > 0$ et $\|u + \lambda v\| = \alpha$, $\lambda$ est différent de 0 (sinon $u \in F \cap F^\perp$ est nul et $(u|v) = 0$). On a :

$$v = \underbrace{-\frac{1}{\lambda}u}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}(u + \lambda v)}_{\in F^\perp} \text{ et donc } u = -\lambda\pi(v) \text{ et } u + \lambda v = \lambda w.$$

Nécessairement $(u+\lambda v|v) = (\lambda w|v) = \lambda\|w\|^2$ d'où $\lambda > 0$ et enfin $\|u+\lambda v\| = \lambda\|w\|$ d'où $\lambda = \frac{\alpha}{\|w\|}$.
S'il existe un couple $(u, \lambda)$ vérifiant les conditions requises on a $\lambda = \frac{\alpha}{\|w\|}$ et $u = -\frac{\alpha}{\|w\|}\pi(v)$ $\boxed{6}$
Réciproquement si l'on pose $\lambda = \frac{\alpha}{\|w\|}$ et $u = -\frac{\alpha}{\|w\|}\pi(v)$ on a :
$u \in F, u+\lambda v = -\frac{\alpha}{\|w\|}\pi(v) + \frac{\alpha}{\|w\|}(\pi(v) + w) = \frac{\alpha}{\|w\|}w \in F^\perp, \|u+\lambda v\| = \alpha, (u+\lambda v|v) = \alpha\|w\| > 0.$
Le problème posé a l'unique solution $\lambda = \frac{\alpha}{\|w\|}$ et $u = -\frac{\alpha}{\|w\|}\pi(v)$ .......................... $\boxed{3}$

**2.** Les conditions $w_0 \in E_0 = \mathrm{Vect}(v_0)$, $(w_0|v_0) > 0$ et $\|w_0\| = \alpha_0$ entraînent $w_0 = \alpha_0\frac{v_0}{\|v_0\|}$. ... $\boxed{1}$
Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Supposons définis les vecteurs $w_0, w_1, \ldots, w_{p-1}$. Les conditions imposées à $w_p$ sont :

- $w_p \in E_p = E_{p-1} \oplus \mathrm{Vect}(v_p)$ donc $w_p$ est de la forme $u_p + \lambda_p v_p$ avec $u_p \in E_{p-1}$.
- $u_p + \lambda_p v_p \in E_{p-1}^\perp$.
- $(u_p + \lambda_p v_p|v_p) > 0$.
- $\|u_p + \lambda_p v_p\| = \alpha_p > 0$.

Il s'agit exactement du problème traité en **1.** avec $E_{p-1}$ dans le rôle de $F$ et $v_p$ dans celui de $v$. Il y a existence et unicité de la solution. Par récurrence limitée à $p \leqslant n$ on a bien établi l'existence et l'unicité de la base $(w_0, \ldots, w_n)$ de $E_n$ vérifiant les conditions imposées. ... $\boxed{4}$

### Deuxième partie $\boxed{40}$

**3 a.** On voit bien que :

- $\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b])^2$, $(g|f) = \varphi(gf) = \varphi(fg) = (f|g)$.
- $\forall (f, g, h) \in \mathcal{C}([a, b])^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(f|(\lambda g + h)) = \varphi(\lambda fg + fh) = \lambda\varphi(fg) + \varphi(fh) = \lambda(f|g) + (f|h)$.
- $\forall f \in \mathcal{C}([a, b])$, $f^2$ est positive ou nulle donc $(f|f) = \varphi(f^2) \geqslant 0$ et $(f|f) > 0$ si $f$ n'est pas identiquement nulle.

$(f, g) \mapsto (f|g)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, *i.e.* un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$. ................................................................... $\boxed{2}$

**b.** Pour tout entier $n$ l'espace $E_n \cap E_{n-1}^\perp$ est de dimension 1 (en convenant $E_{-1} = \{0\}$ pour le cas $n = 0$) et contient donc exactement deux polynômes (opposés) de norme $\alpha_n$, qui sont de degré $n$. Sur ces deux polynômes **un seul** a un coefficient dominant strictement positif, appelons le $P_n$.

- Par construction $P_n \in E_n$ et le coefficient de $x^n$ dans $P_n$ $k_n$ est strictement positif.
- Soient $m$ et $n$ deux entiers distincts. On peut sans restreindre la généralité supposer $m < n$. On a pris $P_n$ dans $E_{n-1}^\perp$ qui est contenu dans $E_{m-1}^\perp$, donc $(P_m|P_n) = \varphi(P_m P_n) = 0$.
- Par construction $\|P_n\| = \alpha_n$ soit $(P_n|P_n) = \varphi(P_n^2) = \alpha_n^2$.

Il y a bien existence et unicité de la suite de polynômes $(P_0, P_1, \ldots)$ de $E$ satisfaisant les conditions requises. ............................................................ $\boxed{4}$

**4** **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. La considération des monômes dominants des deux membres de la relation

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) + C_n P_{n-2}(x)$$

impose déjà $A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}$. ........ $\boxed{2}$

Le polynôme $P_n - \frac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1}$ est de degré au plus $n-1$ et se décompose sur la base $(P_0, \dots, P_{n-1})$ de $E_{n-1}$.

Soit $P_n - \frac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i$ cette décomposition et soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. Le produit scalaire avec $P_j$ fournit $(P_n|P_j) - (\frac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1}|P_j) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i (P_i|P_j) = \lambda_j \alpha_j^2$ soit

$\lambda_j = -\frac{1}{\alpha_j^2} \frac{k_n}{k_{n-1}} (xP_{n-1}|P_j)$. ........ $\boxed{2}$

Par définition on a $(xP_{n-1}|P_j) = \varphi(xP_{n-1}P_j) = \varphi(P_{n-1}xP_j) = (P_{n-1}|xP_j)$ et comme pour $j \leqslant n-3$, $xP_j \in E_{j+1}$, on obtient $\lambda_j = 0$ puisque $E_{j+1} \subset E_{n-2}$ et $P_{n-1} \in E_{n-2}^{\perp}$. Il reste $P_n - \frac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1} = \sum\limits_{i=n-2}^{n-1} \lambda_i P_i$. Avec $\lambda_{n-1} = B_n$ et $\lambda_{n-2} = C_n$ il vient précisément :

$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) + C_n P_{n-2}(x)$. ........ $\boxed{5}$

**b.** On sait déjà que : $A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}\cdot$ On a vu que $C_n = \lambda_{n-2} = -\frac{1}{\alpha_{n-2}^2} \frac{k_n}{k_{n-1}} (xP_{n-1}|P_{n-2}) = -\frac{1}{\alpha_{n-2}^2} \frac{k_n}{k_{n-1}} (P_{n-1}|xP_{n-2})$. Or le polynôme $P_{n-1} - \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} x P_{n-2}$ est de degré au plus $n-2$, il est donc orthogonal à $P_{n-1}$. On a ainsi

$$(P_{n-1} - \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} x P_{n-2}|P_{n-1}) = 0 \text{ soit } (xP_{n-2}|P_{n-1}) = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} (P_{n-1}|P_{n-1}) = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \alpha_{n-1}^2$$

et finalement : $C_n = -\frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_{n-2}^2} \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2}\cdot$ ........ $\boxed{5}$

**5** **a.** Une fonction polynôme ne change de signe que pour les zéros de multiplicité impaire. Si $P_n$ n'avait aucun zéro de multiplicité impaire dans $]a, b[$, la fonction polynôme associée aurait un signe fixe sur $[a, b]$ et comme ce n'est pas la fonction nulle on aurait $\varphi(P_n) \neq 0$ donc $(P_0|P_n) = k_0 \varphi(P_n) \neq 0$ ce qui est impossible si $n \geqslant 1$. Si $n \geqslant 1$, $P_n$ a au moins un zéro de multiplicité impaire dans $]a, b[$. ........ $\boxed{3}$

**b.** Soit $n \geqslant 1$ et $r$ le nombre de zéros de multiplicité impaire de $P_n$ dans $]a, b[$. Notons $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ ces zéros et $T_n$ le polynôme $\prod\limits_{k=1}^{r} (x - a_k)$. Le polynôme $Q_n = P_n T_n$ n'a pas de zéro de multiplicité impaire dans $]a, b[$ : en effet ses zéros dans $]a, b[$ sont les éventuels zéros de $P_n$ autres que les $a_i$ avec la même multiplicité que dans $P_n$ et les $a_i$ avec la multiplicité qu'ils ont dans $P_n$ augmentée de 1. Comme $Q_n$ n'est pas nul on en déduit $\varphi(Q_n) \neq 0$ soit $(T_n|P_n) \neq 0$ ce qui impose $T_n \notin E_{n-1}$ puisque $P_n \in E_{n-1}^{\perp}$. Ainsi $r = \deg T_n \geqslant n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P_n$ a $n$ zéros réels simples et ils sont tous dans $]a, b[$. ........ $\boxed{5}$

**6** **a.** On sait que dans la division euclidienne $A = BQ + R$ de $A$ par $B$ on a soit $Q = 0$ soit $\deg Q = \deg A - \deg B$ si $\deg A \geqslant \deg B$ et conventionnellement $\deg Q = -\infty$ sinon, donc toujours $\deg Q \leqslant \deg A - \deg B$ et $\deg R < \deg B$.

Dans la division euclidienne $G = QP_n + R$ de $G$ par $P_n$ on a donc $\deg Q \leqslant n-1$ et $\deg R < n$, par conséquent : $Q$ et $R$ sont dans $E_{n-1}$. ........ $\boxed{2}$

**b.** On remarque la propriété $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ en notant $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker. Il en résulte que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\left( \sum\limits_{i=1}^{n} R(a_i) L_i \right) (a_j) = R(a_j)$ donc que le polynôme $R - \sum\limits_{i=1}^{n} R(a_i) L_i$ a au moins les $n$ racines $a_1, \dots, a_n$. Comme il est de degré au plus $n-1$ il est nul et on a bien : $R = \sum\limits_{i=1}^{n} R(a_i) L_i$. ........ $\boxed{2}$

**c.** On a $\varphi(G)=\varphi(QP_n+R)=(Q|P_n)+\varphi(R)=\varphi(R)=\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n}R(a_i)L_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}R(a_i)\varphi(L_i)$ et la relation $G=QP_n+R$ entraîne $\forall i\in[\![1,n]\!],\ R(a_i)=G(a_i)$. On a bien $\varphi(G)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i G(a_i)$ en posant $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=\varphi(L_i)$. .................................................. $\boxed{3}$

**d.** Appliquons la propriété précédente au polynôme $L_j^2$ qui est positif et non identiquement nul ; c'est légitime puisqu'il est de degré $2(n-1)$ donc dans $E_{2n-1}$. Comme $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ L_j^2(a_i)=\delta_{i,j}^2=\delta_{i,j}$, on obtient $\lambda_j=\varphi(L_j^2)$ et on en déduit d'après les propriétés de $\varphi$ : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i>0$. .................................................. $\boxed{5}$

## Troisième partie $\boxed{30}$

**7.** Il est immédiat que $\deg F_n=n$. .................................................. $\boxed{0}$
La formule de Leibniz s'écrit :

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big((x+1)^n\big)\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\big((x-1)^n\big)=n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x+1)^{n-k}(x-1)^k \qquad \text{d'où}$$

$F_n(1)=2^n n!$ et $F_n(-1)=(-2)^n n!$ .................................................. $\boxed{3}$
De même on calcule :

$$F_n'(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big((x+1)^n\big)\frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}\big((x-1)^n\big)=nn!\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{n-1}{k-1}(x+1)^{n-k}(x-1)^{k-1}$$

d'où $F_n'(1)=n2^{n-1}(n+1)!$ et $F_n'(-1)=n(-2)^{n-1}(n+1)!$ .................................................. $\boxed{3}$

**8.** $F_0$ est un polynôme de degré 0 évidemment proportionnel à $P_0$ qui est aussi de degré 0.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $P\in E_{n-1}$. On remarque que 1 et $-1$, qui sont racines d'ordre $n$ de $(x^2-1)^n$, sont racines de $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big((x^2-1)^n\big)$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. Calculons alors le produit scalaire $(F_n|P)$ en faisant des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
(F_n|P)&=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((x^2-1)^n\big)P(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\big((x^2-1)^n\big)P(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\big((x^2-1)^n\big)P'(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\underbrace{\left[-\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\big((x^2-1)^n\big)P'(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0}+\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\big((x^2-1)^n\big)P''(x)\,\mathrm{d}x\\
&\ \ \vdots\\
&=\underbrace{\left[(-1)^{n-1}(x^2-1)^nP^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0}+(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^nP^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\\
&=0
\end{aligned}$$

puisque $P^{(n)}$ est le polynôme nul. On voit ainsi que $F_n\in E_n\cap E_{n-1}^{\perp}$ ce qui suffit pour affirmer que : $F_n$ est proportionnel à $P_n$ défini en **3.b** puisque $E_n\cap E_{n-1}^{\perp}$ est une droite vectorielle qui contient déjà $P_n$. .................................................. $\boxed{6}$

**9.** On voit que le degré de $T(F_n)$ est le même que celui de $F_n$. En particulier il est évident que $T(F_0)$ est proportionnel à $F_0$. .................................................. $\boxed{1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E_{n-1}$. Calculons par parties le produit scalaire $(T(F_n)|P)$. C'est :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))\right)P(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))P(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))P'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))\Big((x^2-1)P'(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\Big[-F_n(x)\Big((x^2-1)P'(x)\Big)\Big]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1}F_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((x^2-1)P'(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque le degré de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((x^2-1)P'(x)\Big)$ est au plus $n-1$ et que d'après la question précédente $F_n$ est dans $E_{n-1}^{\perp}$. Les polynômes $F_n$ et $T(F_n)$ sont tous deux dans la droite vectorielle $E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ (et non nuls) ils sont donc proportionnels. .......... $\boxed{3}$

Il est aisé de calculer le coefficient de proportionnalité de la relation précédente en considérant les monômes dominants : si $F_k$ est dominé par $\lambda_k x^k$, $(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_k$ l'est par $\lambda_k k x^{k+1}$ et donc $T(F_k)$ l'est par $\lambda_k k(k+1)x^k$. La relation obtenue à la question précédente s'écrit donc plus précisément : $T(F_k) = k(k+1)F_k$. .......... $\boxed{2}$

**10. a.** $f'' = \dfrac{-2x}{x^2-1}f' + \dfrac{\gamma}{x^2-1}f$ donc $f''$ est dérivable sur $]-1,1[$ puis, par une récurrence immédiate, $f \in \mathcal{C}^n(]-1,1[)$ pour tout $n$.

$f$, $f'$ et $f''$ admettent un développement limité et sont solutions de (1) donc on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k c_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} k c_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n+1} k c_k x^{k-1} + o(x^n) \\ T(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)c_k x^k - \sum_{k=2}^{n+2} k(k-1)c_k x^{k-2} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)c_k x^k - \sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)(kc_k - (k+2)c_{k+2})x^k + o(x^n).\end{aligned}$$

Compte-tenu de l'unicité du développement limité l'égalité $T(f) = \gamma f$ équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)(kc_k - (k+2)c_{k+2}) = \gamma c_k$$

ou encore $\forall k \in \mathbb{N},\ c_{k+2} = \frac{1}{k+2}\left(k - \frac{\gamma}{k+1}\right)c_k$. .......... $\boxed{5}$

**b.** S'il existe un entier naturel $n$ tel que $\gamma = n(n+1)$ la formule de récurrence précédente montre que $\forall i \in \mathbb{N},\ c_{n+2i} = 0$. .......... $\boxed{2}$

On vérifie alors que si $\gamma$ est de la forme $2n(2n+1)$ pour un entier $n$, alors le polynôme $Q_{2n} = \sum\limits_{p=0}^{n} c_{2p}x^{2p}$ est solution de (1). .......... $\boxed{2}$

On a alors $T(Q_{2n}) = 2n(2n+1)Q_{2n}$ ce qui entraîne que $Q_{2n}$ est proportionnel à $F_{2n}$. $\boxed{3}$