SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

À toute suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on associe les suites définie sur $\mathbb{N}^*$ par les relations

$$b_n = \Delta(a_n) = a_{n-1} - a_n,\ c_n = I(a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},\ d_n = \Delta^2(a_n) = a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n.$$

- On dit que (a_n) est à variation bornée si la série $\sum b_n$ est absolument convergente.
- On dit que (a_n) est quasi-convexe si la série $\sum nd_n$ est absolument convergente.
- On dit que (a_n) est convexe si elle est à valeurs réelles et si le réel d_n est positif ou nul pour tout $n \geqslant 1$.

On utilisera aussi (sans démonstration) la propriété suivante

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{n} a_{n,p}\right) = \sum_{p=1}^{N}\left(\sum_{n=p}^{N} a_{n,p}\right)$$

Questions préliminaires

O.1. Montrer que, si (a_n) est à variation bornée alors (a_n) est convergente.

O.2. Prouver l'égalité

$$\sum_{n=1}^{N} nd_n = \sum_{n=1}^{N} b_n - Nb_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} b_n - (N+1)b_{N+1}.$$

Dans les deux premières parties, (a_n) est une suite réelle.

Partie I

I.1. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite (b_n), pour que la suite (a_n) soit convexe.

I.2. On suppose dans cette question, qu'il existe une fonction réelle f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, à dérivée seconde positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $a_n = f(n)$ pour tout n.

Démontrer que (a_n) est convexe.

I.3. Déterminer toutes les suites convexes (a_n) telles que les suites définies par les relations $a'_n = -a_n$ soient également convexes.

I.4. Déterminer les valeurs du réel strictement positif α telles que la suite $a_n = n^\alpha$ soit convexe.

I.5. Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$. On adopte, dans cette question, $a_n = [n^\alpha]$ où α est un réel strictement positif.

a. Y-a-t-il des valeurs de n pour lesquelles $d_n < 0$? Si oui, préciser ces valeurs pour $n \leqslant 50$.

b. Démontrer que la suite (a_n) est convexe pour $\alpha \geqslant 2$.

Partie II

Dans cette partie, (a_n) est une suite convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $|a_n|$.

II.1. Démontrer que la suite (b_n) est convergente. Déterminer sa limite.

II.2. Démontrer que la suite (a_n) est convergente.

II.3. Soient n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant 2p$; démontrer les relations

$$0 \leqslant nb_n \leqslant 2(a_p - a_n).$$

En déduire les limites des suites (nb_n) et (nb_{n+1}).

II.4. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Partie III

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe quasi-convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $|a_n|$.

III.1. Démontrer, pour tout entier $N \geqslant 2$, la relation

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leqslant |a_0 - a_N| + 2\sum_{n=1}^{N-1} n|d_n|.$$

En déduire que (a_n) est à variation bornée.

III.2. Démontrer (en justifiant l'existence des sommes des séries concernées) les relations suivantes

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n|d_n|.$$

III.3. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Partie IV

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

IV.1. Démontrer, pour n et N entiers supérieurs ou égaux à 1, les relations

$$c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1})$$

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n - c_{n+1}| \leqslant \sum_{m=1}^{N} |a_m - a_{m+1}|.$$

IV.2. On suppose, dans cette question, que (a_n) est à variation bornée. Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, le nombre $c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n$ en fonction de $c_{n-1} - c_n$ et $a_{n+1} - a_n$. En déduire que (c_n) est quasi-convexe et que l'on a la relation

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n| \leqslant 3\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

IV.3. On suppose, dans cette question, que (a_n) est bornée et que (c_{n+1}) est quasi-convexe. Démontrer, en utilisant le résultat de **III.1**, que (a_n) est à variation bornée et convergente.

IV.4. On pose, dans cette question, $a_0 = 0$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ si n n'est pas une puissance de 2, $b_n = \dfrac{1}{n}$ si n est une puissance de 2.

Démontrer que ceci définit une suite (a_n) vérifiant les propriétés supposées en **IV.2** et **IV.3**.

Peut-on écrire encore, dans ce cas, la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ ?$$

IV.5. On suppose, dans cette question, que (a_n) est à variation bornée. Démontrer que les propositions
- la série $\sum \frac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente,
- la série $\sum \frac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente,

sont équivalentes (on établira une relation simple entre $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$, $\dfrac{c_n}{n+1}$ et $c_{n+1} - c_n$).

Partie V

Dans cette partie, on donne une interprétation en terme d'espaces vectoriels normés des résultats des parties **III**, **IV**. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des suites (a_n) quasi-convexes bornées vérifiant $a_0 = 0$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites (a_n) à variation bornée vérifiant $a_0 = 0$.

V.1. Montrer que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces vectoriels.

V.2. On définit, lorsque les séries intervenant sont convergentes,

$$N_1(a_n) = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta a_n \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} n |\Delta^2 a_n|$$

$$N_2(a_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta a_n|.$$

Est-ce que N_1, N_2 sont des normes sur $\mathcal{Q}$, sur $\mathcal{V}$? Sont-elles équivalentes ?

V.3. Si $I \ : (a_n) \in \mathcal{V} \mapsto (c_n) \in \mathcal{Q}$ (en posant $c_0 = 0$). Montrer que I est bien définie et que I est une application linéaire continue.

Partie VI

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

VI.1. Démontrer, pour tout entier $p \geqslant 1$, les relations

$$\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leqslant 1 + \ln p$$

$$\Big| |a_p \ln p - a_{p+1} \ln(p+1)| - |a_p - a_{p+1}| \ln p \Big| \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p}.$$

VI.2. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes
- la suite $(a_n \ln n)$ converge vers 0 et la série $\sum (a_n - a_{n+1}) \ln n$ est absolument convergente,
- les séries $\sum \dfrac{a_n}{n}$ et $\sum (a_n \ln n - a_{n+1} \ln(n+1))$ sont absolument convergentes.

VI.3. Donner un exemple simple de suite (a_n) satisfaisant aux deux conditions ci-dessus.