SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Questions préliminaires $\boxed{4}$

O.1. Si (a_n) est à variation borné alors la série $\sum b_n$ est convergente or $\sum_{n=1}^{N} b_n = a_N - a_0$ donc $\boxed{(a_n) \text{ est convergente}}$ . . . . $\boxed{2}$

O.2. On peut faire la démonstration par récurrence ou directement

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} nd_n &= \sum_{n=1}^{N} n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} nb_n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)b_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n=1}^{N} (n-1)b_n - \sum_{n=1}^{N} (n-1)b_n - Nb_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} b_n - Nb_{N+1}.\end{aligned}$$ $\boxed{2}$

Partie I $\boxed{15}$

I.1. On a $d_n = b_n - b_{n+1}$ d'où $\boxed{(a_n) \text{ est convexe ssi } (b_n) \searrow}$ . . . . $\boxed{1}$

I.2. $d_n = f(n-1) + f(n+1) - 2f(n)$ puis, on utilise l'égalité $n = \frac{1}{2}[(n+1) + (n-1)]$ et le fait que f est convexe d'où

$$f(n) \leqslant \frac{1}{2}[f(n+1) + f(n-1)].$$

Conclusion : $\boxed{(a_n) \text{ est convexe}}$ . . . . $\boxed{2}$

I.3. On a donc (b_n) et $(-b_n)$ croissantes donc (b_n) est une suite constante soit $a_{n-1} - a_n = b$ ce qui donne encore $a_n = nb + a_0$. La réciproque est évidente.
Conclusion : $\boxed{\text{les suites convexes et d'opposé convexe sont les suites arithmétiques}}$ . . . $\boxed{2}$

I.4. Si $\alpha \geqslant 1$ alors, comme $f(x) = x^\alpha$ est convexe, $a_n = n^\alpha$ est convexe.
Si $\alpha < 1$ alors $f(x) = x^\alpha$ est strictement concave donc $d_n < 0$.
Conclusion : $\boxed{(n^\alpha) \text{ est convexe ssi } \alpha \geqslant 1}$ . . . . $\boxed{1}$

I.5. **a.**

d_9	d_{25}	d_{32}	d_{42}	d_{47}	d_{49}
-1	-1	-1	-1	-1	-1

donc $\boxed{(a_n) \text{ n'est pas convexe}}$ . . . . $\boxed{3}$

b. Première question un peu délicate.
On a

$$\begin{aligned}(n+1)^\alpha - 1 &< [(n+1)^\alpha] \\ (n-1)^\alpha - 1 &< [(n-1)^\alpha] \\ -2n^\alpha &\leqslant -2[n^\alpha]\end{aligned}$$

d'où, en additionnant ces inégalités, on trouve $d_n \geqslant (n+1)^\alpha + (n-1)^\alpha - 2n^\alpha - 2$.
Soit $f(x) = (x+1)^\alpha + (x-1)^\alpha - 2x^\alpha - 2$ alors $f(1) = 2^\alpha - 4 \geqslant 0$ (car $\alpha \geqslant 2$) puis $f'(x) = \alpha[(x+1)^{\alpha-1} + (x-1)^{\alpha-1} - 2x^{\alpha-1}]$ qui est positif car $g(x) = x^{\alpha-1}$ est convexe.
Donc f est croissante et $f(1) \geqslant 0$, $f(n)$ est positif pour $n \geqslant 1$.
Conclusion : $\boxed{\text{si } \alpha \geqslant 2 \text{ alors } ([n^\alpha]) \text{ est convexe}}$ . . . . $\boxed{6}$

Partie II 10

II.1. $(b_n) \searrow$ et $b_n \geqslant -2A$ donc (b_n) converge. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l \neq 0$ alors (a_n) n'est pas bornée (en supposant $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b > 0$—par exemple—alors $\exists n_0 \mid \forall n \geqslant n_0,\ b_n \geqslant \dfrac{1}{2}b$ d'où $a_n \leqslant a_{n-1} - \dfrac{1}{2}b \leqslant a_{n_0} - \dfrac{n-n_0}{2}b \to -\infty$).

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \text{ et, comme } (b_n) \searrow 0 \text{ alors } b_n \geqslant 0}$ 4

Remarque : on pouvait aussi utiliser la sommation des relations de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} b_n = a_N - a_0 \sim Nl$ si $l \neq 0$ ce qui abouti à une contradiction.

II.2. On a $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n = a_0 - a_N$ et comme (a_n) est bornée, que $b_n \geqslant 0$, on en déduit que la série $\sum b_n$ converge et donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est convergente}}$ 2

II.3. On écrit

$$\begin{aligned} a_p - a_n = \sum_{k=p+1}^{n} b_k &\geqslant (n-p)b_n \quad \text{car } (b_n) \searrow \\ &\geqslant \frac{n}{2} b_n \quad \text{car } -p \geqslant -\frac{n}{2} \text{ et } b_n \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{0 \leqslant nb_n \leqslant 2(a_p - a_n)}$ 2

On prend $p = [n/2]$ d'où $0 \leqslant nb_n \leqslant 2(a_{[n/2]} - a_n) \to 0$.

Ensuite, comme $0 \leqslant nb_{n+1} \leqslant (n+1)b_{n+1}$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nb_{n+1} = 0}$ 1

II.4. On utilise l'égalité de **O.2** et comme $\lim\limits_{N\to+\infty} Nb_{N+1} = 0$ on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}.$$

par passage à la limite. 1

Partie III 15

III.1. Question difficile, en fait, on veut prouver que

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| + 2\sum_{n=1}^{N-1} n|b_n - b_{n+1}|.$$

et pour cela, on utilise les inégalités

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} n|d_n| &= \sum_{n=1}^{N-1} n|b_n - b_{n-1}| \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{N-1} n(|b_n| - |b_{n+1}| \geqslant \sum_{n=1}^{N} |b_n| - N|b_N| \end{aligned}$$

puis

$$\sum_{n=1}^{N-1} n|d_n| \geqslant \left|\sum_{n=1}^{N-1} n(b_n - b_{n+1})\right| \geqslant \left|\sum_{n=0}^{N-1} b_n - Nb_N\right|$$
$$\geqslant -\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| + N|b_N|$$

et on fait la somme d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leqslant |a_0 - a_N| + 2\sum_{n=1}^{N-1} n|d_n|}$ 10

On a donc l'inégalité demandée, on en déduit que $\sum_{n=1}^{N} |b_n|$ est majorée donc la série $\sum b_n$ est absolument convergente, $\boxed{(a_n) \text{ est à variation bornée}}$ (donc convergente)......... 1

III.2. La première inégalité est évidente car la série $\sum b_n$ est convergente. La deuxième est tout aussi évidente car $a_0 - a_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on peut conclure. 1

III.3. En utilisant l'égalité **O.2**, on a

$$Nb_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} b_n - \sum_{n=1}^{N-1} nd_n$$

donc Nb_{N+1} a une limite car $\sum b_n$ et $\sum nd_n$ convergent. Cette limite ne peut être que 0 (sinon $\sum b_n$ divergerait) d'où, quand $N \to +\infty$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}. \qquad 3$$

Partie IV 28

IV.1. On sait (question **O.2**) que $\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1}) = \sum_{m=1}^{n} a_m - na_{n+1}$ (en remplaçant b par a et N par n). Or

$$n(n+1)(c_n - c_{n+1}) = (n+1)\sum_{m=1}^{n} a_m - n\sum_{m=1}^{n} a_m = \sum_{m=1}^{n} a_m - na_{n+1}$$

d'où

$$\boxed{c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1})}$$

en divisant par $n(n+1)$ et en remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ 2

Ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|c_n-c_{n+1}| &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n}m|a_m-a_{m+1}| \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{N}m|a_m-a_{m+1}|\underbrace{\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{=\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}\leqslant\frac{1}{m}} \quad \text{en permutant les sommes} \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{N}|a_m-a_{m+1}|.\end{aligned}$$

3

IV.2. On écrit

$$\begin{aligned}n(n+1)(c_{n+1}-c_n) &= -\sum_{m=1}^{n}m(a_m-a_{m+1}) = -n(a_n-a_{n+1})-\sum_{m=1}^{n-1}m(a_m-a_{m+1}) \\ &= -n(a_n-a_{n+1})+n(n-1)(c_n-c_{n-1})\end{aligned}$$

d'où, en écrivant que $c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n = -(c_n-c_{n-1})+(c_{n+1}-c_n)$,

$$\boxed{c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n = \frac{1}{n+1}[(a_{n+1}-a_n)+2(c_{n-1}-c_n)]}.$$

3

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}n|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n| &\leqslant \sum_{n=2}^{N}\frac{n}{n+1}(|a_{n+1}-a_n|+2|c_{n-1}-c_n|) \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{N}|a_{n+1}-a_n|+2\sum_{n=1}^{N-1}|a_{n+1}-a_n| \quad \text{relation du } \textbf{IV.1} \\ &\leqslant 3\sum_{n=1}^{N}|a_{n+1}-a_n|\end{aligned}$$

donc, la série $\sum n|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n|$ converge, (c_n) est quasi-convexe et, par passage à la limite, on a

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}n|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n| \leqslant 3\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|}.$$

2

IV.3. Comme (a_n) est bornée, (c_n) est bornée, or, au **III**, on a vu qu'une suite quasi-convexe et bornée était à variation bornée donc (c_n) est à variation bornée. On utilise ensuite la relation du **IV.2**

$$(n+1)[c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n]+2(c_n-c_{n-1}) = a_{n+1}-a_n$$

d'où $|a_{n+1}-a_n| \leqslant (n+1)|\Delta^2 c_n|+2|\Delta c_n|$, par conséquent

$\boxed{(a_n) \text{ est à variation bornée et convergente}}$ 4

IV.4. On a $b_n \geqslant 0$, $\sum b_n$ peut être considéré comme la somme de deux séries $\sum_{n\neq 2^p}\frac{1}{n^2}$, $\sum\frac{1}{2^p}$ qui convergent. (a_n) est donc à variation bornée. Vu le **IV.2**, $\boxed{(c_n) \text{ est quasi-convexe}}$ 3

On utilise à nouveau l'égalité du **O.2**, or, comme Nb_{N+1} n'a pas de limite, $\sum nd_n$ diverge,

$\boxed{\text{on ne peut donc avoir l'égalité proposée}}$ 4

IV.5. On a $(n+1)c_{n+1} = \underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}_{=nc_n=(n+1)c_n-c_n} + a_{n+1}$ d'où, en divisant par $n+1$, on obtient $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = c_{n+1} - c_n + \dfrac{c_n}{n+1}}$ et $\boxed{\dfrac{c_n}{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{n+1} + c_n - c_{n+1}}$ 1

Comme (a_n) est à variation bornée, la série $\sum c_{n+1}-c_n$ est absolument convergente.

- Si $\sum \dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente alors l'inégalité $\left|\dfrac{a_{n+1}}{n+1}\right| \leqslant |c_{n+1}-c_n| + \left|\dfrac{c_n}{n+1}\right|$ permet d'affirmer, par domination, que $\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente. ... 2
- Si $\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente alors l'inégalité $\left|\dfrac{c_n}{n+1}\right| \leqslant \left|\dfrac{a_{n+1}}{n+1}\right| + |c_n - c_{n+1}|$ prouve de même que la série $\sum \dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente. 1

Conclusion : on a bien l'équivalence $\boxed{\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1} \text{ A.C.} \Leftrightarrow \sum \dfrac{c_n}{n+1} \text{ A.C.}}$

PARTIE V 21

V.1. Il suffit de prouver que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{V}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et pour cela, on utilise le fait que Δ et Δ^2 sont des applications linéaires et l'inégalité triangulaire. .. 2

V.2. N_1 est définie sur $\mathcal{Q}$ mais pas sur $\mathcal{V}$, par contre N_2 est définie sur $\mathcal{Q}$ et sur $\mathcal{V}$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates.

Montrons les implications $N_1(a_n)=0 \Rightarrow (a_n)=0$ et $N_2(a_n)=0 \Rightarrow (a_n)=0$:

$$N_1(a_n) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \Delta a_n = 0 \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta^2(a_n)=0\right).$$

La première condition entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ (car $a_0=0$), la deuxième permet de dire que $a_n = na_1$ (par récurrence) d'où $a_n=0$ pour tout n. 3

$N_2(a_n)=0 \Rightarrow (a_n)$ constante et comme $a_0=0$, $(a_n)=0$. 1

Conclusion : $\boxed{N_1 \text{ est une norme sur } \mathcal{Q},\ N_2 \text{ est une norme sur } \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{V}}$.

Ensuite, vu l'inégalité du **III.2**, on a $\boxed{N_2(a_n) \leqslant 2N_1(a_n)}$ pour $(a_n)\in\mathcal{Q}$. 1

Cherchons maintenant une suite $(a_n)\in\mathcal{V}$ telle que $(a_n)\notin\mathcal{Q}$, on posera alors a^m la suite définie par $a_n^m = \begin{cases} a_n & \text{si } n\leqslant m \\ 0 & \text{si } n>m \end{cases}$. $a^m\in\mathcal{Q}$, $N_2(a_n^m)$ sera bornée et $N_1(a_n^m)$ tendra vers l'infini.

Pour cela, on prend $a_1 = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $b_n - b_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ i.e. $b_{n+1} = -a_1 + \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Grâce au théorème des séries alternées, on sait que $|b_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$ donc $(a_n)\in\mathcal{V}$, puis $n|d_n| = n|b_n - b_{n+1}| = \dfrac{1}{n}$ donc $\sum n|d_n|$ diverge. $N_2(a_n^m) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n|$ et $N_1(a_n^m) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{m-2} n|d_n| \to +\infty$ c.q.f.d. 7

V.3. On a vu au **IV.2** que si $(a_n)\in\mathcal{V}$ alors $(c_n)\in\mathcal{Q}$ donc I est bien définie. I est évidemment une application linéaire. 1

Grâce au **IV.1**, on a $N_2(I(a_n)) \leqslant N_2(a_n)$ donc I est bien continue dans le cas où on munit $\mathcal{Q}$ l'espace d'arrivée de la norme N_2. 2

Grâce au **IV.2**, on a

$$\begin{aligned}
N_1(c_n) &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \Delta c_n\right| + \sum_{n=1}^{+\infty} n|\Delta^2 c_n| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta c_n| + 3\sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta a_n| + |\Delta^2 c_1| \text{ grâce au } \textbf{IV.2} \\
&\leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} + \underbrace{\Delta^2 c_1}_{=\frac{1}{2}|a_2-a_1|} \\
&\leqslant \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta a_n|
\end{aligned}$$

donc I est aussi continue dans le cas où on munit $\mathcal{Q}$ de la norme N_1. 4

Partie VI 15

VI.1. Pour la première relation, on procède par récurrence, $1 \leqslant 1+\ln 1$ puis, à l'aide de l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ on a

$$\frac{1}{p+1} \leqslant -\ln\left(1-\frac{1}{p+1}\right) = \ln\frac{p+1}{p}$$

ce qui permet de passer de la propriété à l'ordre p à l'ordre $p+1$ donc

$$\boxed{\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leqslant 1+\ln p}. \qquad 2$$

Remarque : on peut aussi utiliser la comparaison série-intégrale...
Ensuite, grâce à $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$ on a

$$\Big| |a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)| - |a_p - a_{p+1}|\ln p \Big| \leqslant |a_{p+1}| \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p}. \qquad 2$$

VI.2. • Supposons que les séries $\sum \dfrac{a_n}{n}$ et $\sum(a_n \ln n - a_{n+1}\ln(n+1))$ sont absolument convergentes alors, en utilisant la deuxième inégalité ci-dessus, on a

$$|a_p - a_{p+1}|\ln p \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p} + |a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)|$$

donc $\sum(a_p - a_{p+1})\ln p$ est absolument convergente.
Puis, la convergence de $\sum(a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)$ entraîne la convergence de la suite $(a_n \ln n)$. Si cette limite l est non nulle alors $\sum \dfrac{a_p}{p}$ diverge ($a_n \sim \dfrac{l}{n\ln n}$), ce qui est impossible.
Conclusion : $\boxed{\sum(a_p - a_{p+1})\ln p \text{ est absolument convergente et } a_n \ln n \to 0}$. 3

- La suite $(a_n \ln n)$ converge vers 0 et la série $\sum(a_{n+1} - a_{n+2}) \ln(n+1)$ est absolument convergente. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n} &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \left(\sum_{p=n}^{N-1} |a_p - a_{p+1}| + |a_N| \right) \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{N-1} |a_p - a_{p+1}| \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + |a_n| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{N-1} |a_p - a_{p+1}|(1 + \ln p) + |a_N|(1 + \ln N)
\end{aligned}$$

ce qui permet de dire que $\sum \dfrac{|a_n|}{n}$ converge, il en est de même de $\sum \dfrac{|a_{n+1}|}{n}$. On utilise alors la deuxième relation du **V** qui donne

$$|a_p \ln p - a_{p+1} \ln(p+1)| \leqslant |a_p - a_{p+1}| \ln p + \frac{|a_{p+1}|}{p}$$

et on peut conclure que $\boxed{\sum a_p \ln p - a_{p+1} \ln(p+1) \text{ converge}}$. . . . . $\boxed{7}$

Remarque : on peut aussi utiliser l'inégalité $\dfrac{1}{n} \leqslant -\ln(1 - \frac{1}{n}) = \ln n - \ln(n-1)$ d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{|a_n|}{n} &\leqslant \sum_{n=2}^{N} |a_n| \ln n - \sum_{n=1}^{N-1} |a_{n+1}| \ln n \\
&\leqslant |a_N| \ln N + \sum_{n=1}^{N-1} (\underbrace{|a_n| - |a_{n+1}|}_{\leqslant |a_n - a_{n+1}|}) \ln n \\
&\leqslant \underbrace{|a_N| \ln N}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} |a_n - a_{n+1}| \ln n}_{\text{converge}}
\end{aligned}$$

donc $\sum \dfrac{a_n}{n}$ est absolument convergente.

VI.3. $a_n = 0$..., $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n}}$ . . . . $\boxed{1}$