SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Partie I $\boxed{45}$

I.1. Tout d'abord, $\varphi = 0$ et $\varphi = c_i$ sont bien des formes multiplicatives.

$\varphi(e_i.e_i) = \varphi(e_i)^2 = \varphi(e_i)$ i.e. $\varphi(e_i) = 0$ ou 1. On a alors 2 cas :

- soit $\forall i \in [1, n]$: $\varphi(e_i) = 0$ et donc $\varphi = 0$,
- soit $\exists i_0 \in [1, n]$: $\varphi(e_{i_0}) = 1$ et alors, pour $j \neq i_0$ $\varphi(e_{i_0}.e_j) = 0 = \varphi(e_{i_0}).\varphi(e_j)$ d'où $\varphi(e_j) = 0$

donc <u>les seules formes multiplicatives non nulles sont les c_i</u>. . . . . $\boxed{3}$

I.2. **a.** $\varphi \circ f(xy) = \varphi(f(x)f(y)) = \varphi(f(x))\varphi(f(y)) = \varphi \circ f(x).\varphi \circ f(y)$ et comme f est surjective, il existe x dans E tel que $f(x) \notin \operatorname{Ker} \varphi$ donc <u>$\varphi \circ f$ est une forme multiplicative non nulle</u>. . . . . $\boxed{2}$

b. On prend pour φ les différentes formes c_1, c_2, ..., c_n et on écrit $c_i \circ f = c_{j_i}$. On note σ_f l'application $i \mapsto j_i$ alors, pour tout i

$$c_i \circ f \circ f^{-1} = c_{\sigma_f(i)} \circ f^{-1} = c_{\sigma_{f^{-1}} \circ \sigma_f(i)} = c_i$$

donc σ_f (noté σ) est une permutation de $[1, n]$. On a alors

$$f_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_n}),$$

f_σ est bien un automorphisme d'algèbre. . . . . $\boxed{5}$

et il y a en a $n!$. . . . . $\boxed{1}$

<u>Tous les automorphismes d'algèbre s'écrivent sous la forme des f_σ</u>.

I.3. **a.** On a $a - a_1\varepsilon = (0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1)$ de même pour $a - a_i\varepsilon$ qui aura sa i-ième coordonnée nulle. Dans le produit, le seul terme non nul est donc la n-ième composante qui est égale au produit des $a_n - a_i$ d'où

$$(a - a_1\varepsilon)(\ldots)(a - a_{n-1}\varepsilon) = (a_n - a_1)(\ldots)(a_n - a_{n-1})e_n \qquad \boxed{2}$$

De même $\displaystyle\prod_{i \neq j} \frac{a - a_i\varepsilon}{a_j - a_i} = e_j$.

b.

- $\mathcal{A}$ contient toutes les puissances de a ainsi que leurs combinaisons linéaires i.e. tous les éléments qui s'écrivent $P(a)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. On a donc $\mathbb{K}[a] \subset \mathcal{A}$. . $\boxed{1}$
- $\mathbb{K}[a]$ est une algèbre (vérification immédiate) qui contient a donc $\mathbb{K}[a]$ contient $\mathcal{A}$ i.e. $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[a]$. . . . . $\boxed{2}$

c.

- Si les coordonnées de a sont toutes distinctes alors, grâce à la question précédente, tous les vecteurs de la base canonique appartiennent à l'algèbre engendrée par a donc l'algèbre engendrée par a est bien $\mathbb{K}^n$. . . . . $\boxed{2}$
- Comme la sous-algébre engendrée par a est de la forme :

$$\{P(a), P \in \mathbb{K}[X]\} = \{\alpha_0\varepsilon + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_p a^p, \alpha_i \in \mathbb{K}\}.$$

<u>S'il existe $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$</u> alors $\forall P \in \mathbb{K}[X]$: $c_i(P(a)) = c_j(P(a))$ et donc, <u>l'algèbre engendrée par a n'est pas $\mathbb{K}^n$</u>.

Par contraposée, si l'algèbre engendrée par a est $\mathbb{K}^n$ alors les coordonnées de a sont toutes distinctes.

On obtient alors l'équivalence demandée. . . . . $\boxed{3}$

I.4. a. $\varepsilon \in A$ et $\bar{c}_i(\varepsilon) = 1$ donc les $\bar{c}_i$ sont non nulles. 1

b. $c_i \neq c_j$ donc $\exists a \in A : c_i(a) \neq c_j(a)$; on prend alors $\boxed{u_{ij} = \dfrac{a - c_j(a)\varepsilon}{c_i(a) - c_j(a)}}$. 3

c. Le vecteur $\boxed{w_i = \prod\limits_{j \neq i} u_{ij}}$ convient. 2

d. Soit $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_k w_k = 0$ alors $c_i(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k) = \lambda_i = 0$ donc les w_i forment une famille libre. 1

Comme $c_i(w_1 + \cdots + w_k) = 1$ pour $i \leqslant k$ et que, pour $i > k$, il existe $j \leqslant k$ tel que $\bar{c}_i = \bar{c}_j$ alors, pour tout i de $[1, n]$ on a : $\bar{c}_i(w_1 + \cdots + w_k) = 1 = c_i(w_1 + \cdots + w_k)$ i.e. $w_1 + \cdots + w_k = \varepsilon$. 2

On sait que $\mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k) \subset A$, on va montrer l'égalité :

Soit $y = x - c_1(x)w_1 - \cdots - c_k(x)w_k$, on a $c_1(y) = \ldots = c_k(y) = 0$ et comme $y \in A$ on a $c_i(y) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On obtient $y = 0$ et $x = c_1(x)w_1 + \cdots + c_k(x)w_k$ et en conclusion $A \subset \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k)$. Finalement on peut affirmer que

$$\boxed{A = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k).}$$ 3

I.5. a. Sous-algèbres de $\mathbb{K}^2$: $\{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{K}\}$. 1

Sous-algèbres de $\mathbb{K}^3$:

- de dim 1 : $\{(\alpha, \alpha, \alpha)\}$,
- de dim 2 : $\{(\alpha, \alpha, \beta)\}$, $\{(\alpha, \beta, \alpha)\}$, $\{(\beta, \alpha, \alpha)\}$. 2

Les sous-algèbres de dimension k de $\mathbb{K}^n$ s'écriront à une permutation des coordonnées près $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_k)\}$. 3

b. $\mathbb{K}^n$ a

- C_n^1 sous-algèbres de dimension 2 de la forme $\{(\alpha, \ldots, \alpha, \beta)\}$ (on choisit les emplacements de β),
- C_n^2 en répétant 2 fois β (on choisit 2 emplacements de β parmi n),
- C_n^k en répétant k fois β (à condition que $k < n/2$, voir plus loin).

On note A_2 le nombre de sous-algèbres de dimension 2.

- Si $n = 2p + 1$ alors $2A_2 = 2 \sum\limits_{k=1}^{p} C_{2p+1}^k = \sum\limits_{k=1}^{2p} C_{2p+1}^k = 2^{2p+1} - 2$ en utilisant la relation $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- Si $n = 2p$ alors si on répète p fois β on aura, pour chaque choix des emplacements de β, 2 algèbres égales (les autres emplacements seront pris par les α) donc $2A_2 = 2 \sum\limits_{k=1}^{p-1} C_{2p}^k + C_{2p}^p = 2^{2p} - 2$.

donc le nombre total sera :

$$\boxed{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p = 2^{n-1} - 1}$$ 5

On peut aussi procéder de la sorte : chaque coordonnée peut prendre 2 valeurs distinctes α et β ce qui fait 2^n choix. Il faut ensuite retirer les cas $(\alpha, \ldots, \alpha)$ et $(\beta, \ldots, \beta)$ d'où $2^n - 2$ choix. Enfin, l'échange $\alpha \leftrightarrow \beta$ donne la même sous-algèbre donc il faut en enlever la moitié ce qui donne finalement $2^{n-1} - 1$ choix.

Pour avoir une sous-algèbre de dimension $n - 1$, il suffit de répéter un élément 2 fois. $\mathbb{K}^n$ a donc C_n^2 sous-algèbres de dimension $n - 1$ (on choisit les places de 2 éléments parmi n). 1

PARTIE II $\boxed{36}$

II.1. On a $a.e_i = c_i(a)e_i$ (dans la base canonique, μ_a est sous forme diagonale), donc

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mu_a) = \sum_{i=1}^{n} c_i(a) = \mathrm{Tr}(a).} \qquad \boxed{2}$$

II.2. a. Évident : $f(v_k) = f(v_i.v_j) = f(v_i).f(v_j)$; donc, la famille $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$ qui est une base (car f est un automorphisme) est stable. .... $\boxed{2}$

b. Permuter les colonnes revient à permuter les vecteurs de la nouvelle base, ce qui ne change rien au résultat. .... $\boxed{1}$

Si on permute les lignes, cela revient à changer l'ordre des coordonnées de la nouvelle base et la propriété de stabilité qui se traduit par le produit des coordonnées dans la base canonique est conservée. .... $\boxed{2}$

II.3. a. $\varphi(v_i) = 1 \Rightarrow \varphi(v_i.v_j) = 1 = \varphi(v_i).\varphi(v_j)$. Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j v_j$ alors

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= \varphi\left(\sum_{i,j} x_i y_j v_i.v_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(v_i.v_j)\\ &= \sum_{i,j} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j\end{aligned}$$

donc $\boxed{\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)}$ .... $\boxed{2}$

b. La forme φ définie ci-dessus étant multiplicative, on a vu au **I.1** que φ était nécessairement une forme coordonnée soit $\varphi = c_i$ pour $i \in [1, n]$. On a alors, pour tout vecteur v_h de $\mathcal{B}$: $c_i(v_h) = 1$:

<u>la matrice $M_{\mathcal{B}}$ comporte bien une ligne de 1</u>. .... $\boxed{3}$

<u>Il ne peut y avoir d'autre ligne semblable</u> sinon $M_{\mathcal{B}}$ ne serait pas inversible. .... $\boxed{1}$

II.4. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ alors $a^2 \in \{a, b\}$ et par récurrence $a^n \in \{a, b\}$ donc $\boxed{a \in \{-1, 0, 1\}}$ (de même pour b). On obtient alors les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, auxquelles il faut rajouter les matrices obtenues en permutant les lignes puis celle obtenues en permutant les colonnes (ce qui fait 12 matrices en tout). .... $\boxed{4}$

II.5. a. Si $a \in \mathcal{B}$ alors, par récurrence, $a^m \in \mathcal{B}$ et comme $\mathcal{B}$ est un ensemble fini, on pourra trouver un couple (h, k), avec $1 \leqslant h < k \leqslant n$ tel que $a^h = a^k$. .... $\boxed{1}$

On a donc $\forall i \in [1, n]$: $a_i^h = a_i^k$ donc, soit $a_i = 0$, soit $a_i^{k-h} = 1$ et, en tous cas, on aura $a_i^{p+1} = a_i$ en posant $p = k - h \leqslant n - 1$ i.e. $\boxed{a^{p+1} = a}$ .... $\boxed{3}$

b. Dans $\mathbb{R}$, les seules possibilités pour les a_i seront d'appartenir à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ et donc $a_i^3 = a_i$ i.e. $\boxed{p = 2}$ .... $\boxed{3}$

II.6. On a vu au II.5.a que soit $a_i = 0$, soit $a_i^p = 1$ avec $p \leqslant n - 1$, les a_i prennent leurs valeurs dans un ensemble fini donc <u>le nombre de bases stables de $\mathbb{K}^n$ est fini</u>. .... $\boxed{3}$

II.7. Si on écrit μ_a dans la base $\mathcal{B}$, on aura $av_1 = v_{i_1}$, $av_2 = v_{i_2}$, ..., $av_n = v_{i_n}$. Donc, comme la trace de a est égale au nombre d'entiers k de $[1, n]$ tels que $k = i_k$,

$$\mathrm{Tr}(a) \text{ est un entier compris entre } 0 \text{ et } n$$ 2

On aura $\underline{\mathrm{Tr}(a) = n \text{ ssi } a.v_i = v_i}$ et donc, comme les v_i forment une base, $\forall x \in E$, $a.x = x$ i.e. $\boxed{a = \varepsilon}$. 1

II.8. **a.** On a vu au 3.b que M comportait déjà n éléments d'une ligne égaux à 1, dans les $n-1$ autres lignes, M doit comporter au moins un élément non nul, ce qui fait le compte. 2

b. On peut déjà permuter les lignes de M pour amener en première position la ligne des 1.
Sur les autres lignes on a un seul élément non nul et comme la matrice est inversible, nécessairement ces éléments sont situés sur des colonnes différentes. On peut alors permuter les colonnes pour que les $n-1$ éléments non nuls soient sur la diagonale.
Si on appelle λ_i le terme non nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne alors comme $v_i.v_i \in \mathcal{B}$ on obtient $\lambda_i^2 \in \{\lambda_i, 0\}$ et comme $\lambda_i \neq 0$ on a : $\lambda_i^2 = \lambda_i$ i.e. $\lambda_i = 1$ c.q.f.d. 3

c. Immédiat, on a $v_i.v_j = \begin{cases} v_1 & \text{si } i \neq j \\ v_i & \text{si } i = j \end{cases}$. 1

Partie III 37

III.1. **a.** On sait que $a^{p+1} = a$ (cf. **II.5.a.**) et que a est inversible donc on peut simplifier par a : $a^p = \varepsilon$. Comme $a^p \in \mathcal{B}$ on en déduit que $\boxed{\varepsilon \in \mathcal{B}}$. 2

b. Ceci est une conséquence directe de la question précédente, chaque composante d'un vecteur a de $\mathcal{B}$ vérifiant $a^p = \varepsilon$ est une racine p-ième de l'unité. Les coefficients de la matrice $M_{\mathcal{B}}$ sont de module 1. 2

III.2. On a : $a.v_i = v_j$ avec $i \neq j$ car $a \neq \varepsilon$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(a) = 0}$. 1

III.3. $\mathrm{Tr}(\varepsilon) = n$ et $\mathrm{Tr}(s) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(v_i) = n$. 1

On pose $v_j v_i = v_{i_j}$ alors $\sigma \ : j \in [\![1,n]\!] \mapsto i_j \in [\![1,n]\!]$ est injective (si $v_j v_i = v_{j'} v_i$ alors $v_j = v_{j'}$ car v_i est inversible). σ est donc une bijection, par conséquent

$$s.v_i = \sum_{j=1}^{n} v_j.v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{\sigma(j)} = s.$$

et $s^2 = \sum_{i=1}^{n} s.v_i = ns$. 2

On a $c_i(s^2) = c_i(s)^2 = nc_i(s)$ i.e. $c_i(s) = 0$ ou $c_i(s) = n$ et comme $\mathrm{Tr}(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i(s) = n$ alors tous les $c_i(s)$ sont nuls sauf un égal à n, ce qui donne

$$\boxed{s = ne_i.}$$ 1

III.4. $M_{\mathcal{B}}$ se déduit de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ par permutations de lignes et de colonnes : on utilise les propriétés suivantes :

- $M_{\mathcal{B}}$ comporte une ligne de 1 et une colonne de 1,
- la somme des termes des autres lignes vaut 0

- et tous les termes de $M_{\mathcal{B}}$ sont des racines $p^{\text{ième}}$ de l'unité avec $p \leqslant 3$)............ 2

III.5. a. On vérifie les propriétés des groupes :
- Le produit est une loi interne par définition d'une base stable.
- Le produit est associatif par associativité dans l'algèbre $\mathbb{K}^n$.
- ε est l'élément neutre pour le produit.
- $v_1^p = \varepsilon$ donne l'inverse de v_1 (conséquence directe du **III.1.a.**).............. 3

b. Sur $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{Tr}(v_i.v_j) = n\delta_{ij}$ car
- $i = j \Rightarrow v_i^2 = \varepsilon$ (les coordonnées de v_i^2 sont positives et racines de l'unité),
- $i \neq j \Rightarrow v_i.v_j \neq \varepsilon$ (on a trouvé ci-dessus l'unique inverse de v_i).

Si on calcule $M_{\mathcal{B}}^T.M_{\mathcal{B}}$ alors, à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne, on trouve $\mathrm{Tr}(v_i.v_j)$ et donc

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}^T.M_{\mathcal{B}} = nI.}$$ 2

Sur $\mathbb{C}$, de même, on sait que pour tout i de $[\![1, n]\!]$ il existe j tel que $v_i.v_j = \varepsilon$ et que les coordonnées de v_i et v_j sont de module 1, donc $v_j = \bar{v}_i$ i.e. $\mathrm{Tr}(v_i.\bar{v}_i) = n$; d'où, pour $j \neq i$ $\mathrm{Tr}(v_i.\bar{v}_j) = 0$ et comme sur $\mathbb{R}$ on peut conclure :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}^T.\overline{M}_{\mathcal{B}} = nI.}$$ 2

c. On a alors $\det(M_{\mathcal{B}}^T.\overline{M}_{\mathcal{B}}) = \det(M_{\mathcal{B}})\overline{\det(M_{\mathcal{B}})} = n^n$ d'où $\boxed{|\det M_{\mathcal{B}}| = n^{n/2}}$........ 1

III.6. $\boxed{\Rightarrow}$ On veut $P_z.\overline{P}_z = nI$ i.e.

$$\sum_{j=1}^{n} z^{(i-1)(j-1)}\bar{z}^{(j-1)(k-1)} = \sum_{j=1}^{n} \left(z^{i-k}\right)^{j-1} = n\delta_{ik}$$

vrai si $i = k$;

si $i \neq k$ avec $0 < |i-k| < n$, on veut que $\sum_{j=1}^{n} \left(z^{i-k}\right)^{j-1} = 0$ et ceci n'est possible que si $z^{i-k} \neq 1$ et $\sum_{j=1}^{n} \left(z^{i-k}\right)^{j-1} = \dfrac{z^{n(i-k)} - 1}{z^{i-k} - 1} = 0.$

Pour $i - k = 1$ on en déduit que $z^n = 1$ et comme $z^h \neq 1$ pour $h \in [\![1, n-1]\!]$ alors les puissances de z engendrent bien $\mathbb{U}_n$. 3

$\boxed{\Leftarrow}$ Examinons la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de $v_k.v_l$:

$$z^{(j-1)(k-1)}.z^{(j-1)(l-1)} = z^{(j-1)(k+l-2)} = z^{(j-1)(h-1)}$$

(où $k+l-2 = h-1[n]$) i.e. $v_k.v_l = v_h$ donc la base est stable. Il est immédiat que chaque vecteur est inversible.. 1

On pourra prendre par exemple $\boxed{z = e^{2i\pi/n}}$.................................. 0

III.7. a. On peut prendre comme partie génératrice $\mathcal{B}$!

Tous les éléments de $M_{\mathcal{B}}$ sont de module 1 donc leur carré sera 1, d'où $\forall a \in \mathcal{B}$:

$$\boxed{a^2 = \varepsilon.}$$ 1

b. Soit $v = v_{j_1}^{m_1} \dots v_{j_k}^{m_k}$: comme $v_{j_i}^2 = \varepsilon$, on peut se limiter au cas où $m_i = r_i \in \{0, 1\}$; supposons maintenant que l'on ait deux écritures :

$$v = v_{j_1}^{r_1} \dots v_{j_k}^{r_k} = v_{j_1}^{r'_1} \dots v_{j_k}^{r'_k},$$

si $r_1 \neq r_1'$ (par exemple $r_1 = 1$, $r_1' = 0$) alors, on pourra écrire $v_{j_1} = v_{j_2}^{r_2'-r_2} \dots v_{j_k}^{r_k'-r_k}$ ce qui contredit la minimalité de $\mathcal{G}$ donc $r_1 = r_2$; on fait alors de même pour les autres termes. 2

c. L'ensemble $\{v_{j_1}^{r_1}, \dots, v_{j_k}^{r_k}, r_i \in \{0,1\}\}$ est stable, c'est une famille génératrice, montrons qu'elle est libre :
soit $\lambda_0 \varepsilon + \lambda_1 v_{j_1} + \dots + \lambda_{2^k-1} v_{j_1} \dots v_{j_k} = 0$; on prend la trace et on obtient $\lambda_0 = 0$, on compose alors par v_{j_1} : $\lambda_1 \varepsilon + \dots + \lambda_{2^k-1} v_{j_2} \dots v_{j_k} = 0$ et, avec la trace : $\lambda_1 = 0$.
On prouverait ainsi, par une récurrence finie sur $h \leqslant k$ que les coefficients des produits de h termes sont nuls et donc, la base contient 2^k éléments

$$\boxed{n = 2^k.}$$ 3

III.8. **a.** La seule matrice possible est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien la matrice d'une base stable. 2

b. $\boxed{\text{OUI}}$: il suffit de placer la ligne de 1 et la colonne de 1 en première position, comme les autres lignes doivent comporter deux 1 et deux -1, il suffira de permuter les lignes pour que le seul 1 qui reste soit sur la diagonale. 1

III.9. **a.** On notera $v_1' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, ..., $v_n' = \begin{pmatrix} v_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $v_{n+1}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}$, ..., $v_{2n}' = \begin{pmatrix} v_n \\ -v_n \end{pmatrix}$; alors $(v_1', \dots, v_{2n}')$ est une base stable inversible de $\mathbb{R}^n$. 2

b. $n = 2^k$ en effet, si on prend une partie génératrice dont le nombre est minimal, n est nécessairement de la forme 2^k ; à partir de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et en utilisant le a, on peut former par récurrence sur k la matrice d'une base stable. 3