SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

SOMMES DE RAMANUJAN

PRÉLIMINAIRES

On note $\mathcal{D}$ le $\mathbb{C}$- e.v. des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ et on utilisera les éléments suivants de $\mathcal{D}$:

- $I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$,
- $\omega_\alpha : n \mapsto n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ (on rappelle que $n^\alpha = \exp[\alpha \ln n] = n^\lambda \exp[i\mu \ln n]$ pour $\alpha = \lambda + i\mu$), on notera aussi $\omega_0 = E$ (fonction constante égale à 1),
- $\mu(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \text{ contient un facteur carré dans sa décomposition} \\ (-1)^k \text{ si } x = p_1 \dots p_k \text{ est la décomposition de } x \text{ en facteurs premiers} \end{cases}$,

μ est appelé fonction de Moëbius.

Si $f \in \mathcal{D}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est k-périodique ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+k) = f(n)$. On dit que $f \in \mathcal{D}$ est périodique ssi il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que f soit k-périodique, on dira dans ce cas que k est une période de f.

On définit la loi de composition interne suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Une fonction f est dite multiplicative ssi $\begin{cases} f \neq 0 \\ \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \wedge n = 1, f(mn) = f(m)f(n) \end{cases}$

et fortement multiplicative ssi $\begin{cases} f \neq 0 \\ \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, f(mn) = f(m)f(n) \end{cases}$.

On admet alors que $(\mathcal{D}, +, ., *)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative.

On note $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de n, $D_p(n)$ l'ensemble des diviseurs premiers de n et $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

On admettra que si les $(\alpha_k)_{k \in [1,p]}$ *sont les racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k^n \in \mathbb{Z}$.

On rappelle enfin que dans $\mathbb{U}_k$ on appelle racine primitive k-ième de l'unité, tout générateur de $\mathbb{U}_k$.

On suppose dans tout le problème que $(f, g) \in \mathcal{D}^2$.

Première partie : généralités

I.1. Établir des bijections entre $D(mn)$ et $D(m) \times D(n)$, entre $D_p(mn)$ et $D_p(m) \cup D_p(n)$ lorsque $m \wedge n = 1$.

On précisera par la suite à quels moments on utilise ce résultat ainsi que le suivant.

I.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_d = \{k \in [1, n] \mid k \wedge n = d\}$ et $F_d = \{\frac{kn}{d},\ k \in [1, d] \mid k \wedge d = 1\})$. Montrer que les $(E_d)_{d|n}$ forment une partition de $[\![1, n]\!]$, de même pour les $(F_d)_{d|n}$.

I.3. **a.** Quel est l'élément unité de $\mathcal{D}$?

b. Montrer que f est inversible dans $\mathcal{D}$ ssi $f(1) \neq 0$ (on construira f^{-1} par récurrence).

c. Prouver que $\mu^{-1} = E$ (on écrira $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ et on remarquera que, dans l'expression de $\mu * E$, seuls interviennent les diviseurs de n sans facteur carré).

Deuxième partie : fonctions multiplicatives

II.1. **a.** Montrer que si f est multiplicative alors $f(1) = 1$, que si f et g sont multiplicatives, $f * g$ l'est aussi.

b. En raisonnant par l'absurde, prouver que si g et $f * g$ sont multiplicatives alors f est multiplicative (prendre un couple (m, n) tel que $m \wedge n = 1$, $f(mn) \neq f(m)f(n)$ avec mn minimal).

En déduire que si f est multiplicative et inversible, f^{-1} l'est aussi.

c. Si f et g sont multiplicatives, sur quel ensemble $\mathcal{Q}$ *minimal* suffit-il d'avoir $f_{|\mathcal{Q}} = g_{|\mathcal{Q}}$ pour que $f = g$?

d. μ est-elle multiplicative ? Qu'en est-il de ω_α pour $\alpha \in \mathbb{C}$?

II.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on définit $\Phi \in \mathcal{D}$ par

$$\Phi_\alpha(1) = 1,\ \Phi_\alpha(n) = n^\alpha \prod_{p \in \mathcal{P}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right).$$

On rappelle que $\Phi_1 = \varphi$ est la fonction d'Euler ($\varphi(n)$ est le nombre de nombres premiers avec n, inférieurs à n).

a. Vérifier que Φ_α est multiplicative. En déduire que $\Phi_\alpha = \mu * \omega_\alpha$.

b. Montrer que $\omega_\alpha^{-1} = \mu.\omega_\alpha$ (produit ordinaire). En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Phi_\alpha^{-1}(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \mu(d).$$

II.3. **a.** Soit $a \in \mathcal{D}$ inversible et $b = a^{-1}$. On suppose ici que f et g sont à valeurs strictement positives, a et b à valeurs réelles.

Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = \prod_{d|n} (f(d))^{a(n/d)}, \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \prod_{d|n} (g(d))^{b(n/d)}. \tag{2}$$

b. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) = \prod_{d \leqslant n, d \wedge n = 1} d$. À l'aide du **a**, prouver que

$$P(n) = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n} \left(\frac{d!}{d^d}\right)^{\mu(n/d)}$$

c. Soit $J = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $h : J \to \mathbb{C}$. On définit H et $\tilde{H}$ dans $\mathcal{D}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H(n) = \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right), \tilde{H}(n) = \sum_{k \in [1,n], k \wedge n = 1} h\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que $\tilde{H} = \mu * H$ (indication : établir que $H = E * \tilde{H}$).

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la somme des racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de 1 dans $\mathbb{C}$ vaut $\mu(n)$.

TROISIÈME PARTIE : CALCUL DES SOMMES DE RAMANUJAN

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des racines $k^{\text{ièmes}}$ *primitives* de l'unité dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on définit les sommes de Ramanujan :

$$c_k(n) = \sum_{\zeta \in \mathcal{R}_k} \zeta^n.$$

On suppose dans toute cette partie que k et n sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

III.1. a. Si $N \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme : $\Psi_N(X) = \prod_{\zeta \in \mathcal{R}_N} (X - \zeta)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Vérifier que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $X^N - 1 = \prod_{d|N} \Psi_d(X)$ et en déduire que $\Psi_N \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout N de $\mathbb{N}$.

b. Déduire du **a** que la somme de Ramanujan $c_k(n)$ appartient à $\mathbb{Z}$. Reconnaître cet entier lorsque $n = 1$.

Pour les deux questions suivantes, on pose $\zeta = \exp(2i\pi/k)$.

III.2. Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction k-périodique et $\widehat{f}$ le prolongement de f à $\mathbb{Z}$ par k-périodicité. Montrer qu'il existe un unique élément $g \in \mathcal{D}$ k-périodique tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, f(m) = \sum_{p=0}^{k-1} \widehat{g}(p) \zeta^{mp}$$

et que l'on a $\forall p \in \mathbb{N}^*, g(p) = \dfrac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \widehat{f}(m) \zeta^{-mp}$.

III.3. a. On définit $s_k \in \mathcal{D}$ par

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, s_k(m) = \sum_{d|(m \wedge k)} f(d) g(k/d)$$

où f et g sont dans $\mathcal{D}$.

Vérifier que s_k est k-périodique et que, si on pose $a_k(p) = \sum_{d|(p \wedge k)} \dfrac{d}{k} g(d) f(k/d)$ alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, s_k(m) = \sum_{p=0}^{k-1} \widehat{a}_k(p) \zeta^{mp}.$$

b. Déduire du **a** que l'on a

$$c_k(n) = \sum_{d|(n \wedge k)} d\mu(k/d).$$

III.4. a. Soit a et N dans $\mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{d|a, N \wedge d = 1} \frac{a}{d} \mu(d) = a \prod_{p \in \mathcal{P}, p|a, p \notin D(N)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(on pourra montrer que les deux membres de cette égalité sont des fonctions multiplicatives de a que l'on notera Γ et Δ).

b. On pose ici $a = n \wedge k$ et $N = \dfrac{k}{a}$. Déduire du **a** et du **II.3.b** la formule :

$$\boxed{c_k(n) = \frac{\varphi(k)\mu(N)}{\varphi(N)}}.$$

Formule due à Ramanujan, mathématicien indien.