SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Dans les notations ci-dessous, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on note $\exp(u)$ (et parfois $\exp u$) l'exponentielle de l'endomorphisme u :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

On rappelle d'une part que, quand u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$),

$$\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$$

et, d'autre part, que $\exp(u)$ commute avec u.

Si $E = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ s'identifie à l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, on note $A \oplus B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$ donnée par blocs sous la forme :

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

On propose dans ce problème une étude de l'application exponentielle $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et de sa restriction $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Dans les questions **I.1**, **I.2**, **II.1**, **II.4**, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Première partie

I.1. Montrer que l'application $\exp\ : \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E) \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ prend ses valeurs dans le groupe $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ des automorphismes de E.

I.2. **a.** Soient $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$, $v \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$: exprimer $\exp(vuv^{-1})$ en fonction de v et $\exp(u)$. Quelles sont les valeurs propres de $\exp(u)$ en fonction de celles de u ?

b. En déduire une expression de $\det(\exp u)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(u)$ (trace de u) puis le fait que $\exp\ : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ prend ses valeurs dans le groupe $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles $n \times n$ inversibles de déterminant positif.

I.3. Soient $A = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \mu & b \end{pmatrix}$ (a, b, μ appartiennent à $\mathbb{C}$). Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A+B)$; à quelles conditions a-t-on ici $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$?

Deuxième partie

II.1. Soit $\ell(X)$ le polynôme

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(1-X)^i}{i} \ ;$$

pour $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ *nilpotent* et $t \in \mathbb{R}$, calculer

$$(\mathrm{Id}_E + tu) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ell(\mathrm{Id}_E + tu)$$

(Id_E désigne l'application identique de E).

II.2. **a.** Soit $\gamma\ : \mathbb{R} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans une sous-algèbre *commutative* de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ tel que $\gamma(t)$ soit nilpotent pour tout $t \in \mathbb{R}$: calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp \gamma(t)$.

b. On fixe un endomorphisme *nilpotent* $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$;
soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ définie par $f(t) = \exp \ell(\mathrm{Id}_E + tu)$.
Calculer $(\mathrm{Id}_E + tu) f'(t)$; en déduire la valeur de f'' puis celle de f.
Conclure que $\exp \ell(\mathrm{Id}_E + u) = \mathrm{Id}_E + u$.

II.3. Déduire de **2.b** que, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et u endomorphisme nilpotent de E,
$$\lambda \,\mathrm{Id}_E + u \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E).$$

II.4. Montrer que $\exp\ : \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ est une surjection (on admettra que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à $T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_p$ où $T_k = \lambda_k I_{n_k} + N_k$ avec N_k nilpotente).
À titre d'exemple, on explicitera une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que :
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.5. Dans cette question, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n ; si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et u est un endomorphisme nilpotent de E, montrer que $\lambda \,\mathrm{Id}_E + u \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Troisième partie

III.1. Établir un lien entre le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, a, $b \in \mathbb{R}$.
En déduire que :
$$\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \mathrm{e}^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$
Retrouver ce résultat en utilisant la définition originale de l'exponentielle des matrices.

III.2. Expliciter une matrice réelle A ($A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) telle que :
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Plus généralement, si $\lambda < 0$, expliciter une matrice réelle A ($A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$) telle que :
$$\exp(A) = \lambda I_{2n}$$
(I_{2n} désigne l'élément unité de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$).

III.3. Expliciter $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $\exp(A) = -I_{2n}$ et telle que A commute à $B \oplus B$ pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En déduire que, pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $-\exp(B \oplus B) \in \exp \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
À titre d'exemple, on explicitera une matrice $U \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que :
$$\exp(U) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quatrième partie

IV.1. **a.** Expliciter une matrice $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ semblable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) à la matrice
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C}).$$

b. Plus généralement, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, construire une matrice $R \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ semblable (dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$) à $A \oplus \overline{A}$.

IV.2. Soient U, V deux matrices réelles ($U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) semblables comme matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; en considérant des relations du type $UX = XV$, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que U et V sont semblables comme matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV.3. Soit $B \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$; on suppose qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que B soit semblable (dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$) à $A \oplus \overline{A}$; montrer que $B \in \exp \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

IV.4. **a.** En déduire que, pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A \oplus A \in \exp \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

b. Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle ; montrer l'existence d'une décomposition $\mathbb{C}^n = E \oplus \overline{E}$ où E est un $\mathbb{C}$ sous-espace vectoriel stable par B, $\overline{E}$ désignant l'ensemble $\{\overline{z} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n}) \text{ avec } z \in E\}$.
En déduire que $B \in \exp \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cinquième partie

V.1. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\exp \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on pourra raisonner par l'absurde en étudiant les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifierait $\exp(A) = B$).

Dans les questions **2**, **3** et **4**, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, et u un élément de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$.

V.2. On suppose que $u \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}^+(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note $u_{|F}$ la restriction de u à F.

a. Donner un exemple où $u_{|F} \notin \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F)$.

b. On suppose F de la forme $\operatorname{Ker} P(u)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$; montrer que $u_{|F} \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F)$.

c. En déduire une généralisation de la question **V.1** : si $\lambda < 0$, la matrice

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\exp \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

V.3. Soit χ le polynôme caractéristique de u, χ_2 le produit des facteurs irréductibles unitaires (réels) de χ de degré 2, χ_1^+ (respectivement χ_1^-) le produit des facteurs de χ de degré 1 de la forme $(X - \lambda)$ avec $\lambda > 0$ (respectivement $\lambda < 0$). On pose $F^+ = \operatorname{Ker} \chi_1^+(u)$, $F^- = \operatorname{Ker} \chi_1^-(u)$.

a. Montrer que $E = \operatorname{Ker} \chi_2(u) \oplus F^+ \oplus F^-$.

b. En utilisant **II.5**, **IV.4.b** et **V.2.b**, montrer que $u \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ si et seulement si $u_{|F^-} \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F^-)$.

V.4. **a.** Montrer que la condition "u est un carré dans $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$" est nécessaire pour que $u \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

b. On suppose $u = v^2$ avec $v \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$; vérifier que F^- est stable par v puis que $v_{|F^-} \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F^-)$.
En déduire que $\exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ est exactement l'ensemble des carrés de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$.