SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Partie I $\boxed{14}$

I.1. Puisque $\exp(u).\exp(-u) = \mathrm{Id}$, on voit que $\exp(u)$ est inversible et

$$(\exp(u))^{-1} = \exp(-u) \qquad \boxed{2}$$

I.2. **a.** L'application $(f, g) \mapsto fg$ de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)^2$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ est continue (bilinéaire en dimension finie). Par conséquent, par passage à la limite dans l'égalité

$$v\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right)v^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(vuv^{-1})^k}{k!}$$

on obtient

$$v\exp(u)v^{-1} = \exp(vuv^{-1}) \qquad \boxed{2}$$

Choisissons une base de E dans laquelle u admette une matrice T triangulaire, alors la matrice de $\exp(u)$ est aussi triangulaire. Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ désigne les termes de la diagonale de T alors $(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ désigne les termes de la diagonale de $\exp(T)$ matrice de $\exp(u)$ dans cette même base. On a donc $\exp(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(\exp(u))$.......... $\boxed{3}$

b. On a alors $\det(\exp(u)) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{\mathrm{Tr}(u)}$.............................. $\boxed{2}$

En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)} > 0$.................... $\boxed{0}$

I.3. On pose $A = aI + \mu J$ et comme $IJ = JI$ on a

$$\exp(A) = \exp(aI).\exp(\mu J) = e^a(I + \mu J)$$

car $J^2 = 0$ et $\exp(\mu J) = I + \mu J$. On a aussi $\exp(B) = e^b(I + \mu J^{\mathrm{T}})$................. $\boxed{2}$

De même avec $A + B = (a + b)I + \mu K$, $\exp(A + B) = e^{a+b}\exp(K)$. On remarque alors que $K^2 = I$ donc

$$K^{2q} = I,\ K^{2q+1} = K$$

ce qui donne immédiatement

$$\exp(A + B) = e^{a+b}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\mu & \operatorname{sh}\mu \\ \operatorname{sh}\mu & \operatorname{ch}\mu \end{pmatrix} \qquad \boxed{2}$$

a comparer à $\exp(A).\exp(B) = e^{a+b}\begin{pmatrix} 1+\mu^2 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : on a l'égalité $\exp(A + B) = \exp A.\exp B$ ssi $\mu = 0$ (c'est aussi la C.N.S. pour que A et B commutent).. $\boxed{1}$

Partie II $\boxed{28}$

Rappelons que, si u est un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension n, on a $u^n = 0$.

II.1. On remarque aussi que, dans le cas qui nous intéresse, $\ell(\mathrm{Id}_E + tu) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-tu)^i}{i}$ est nilpotent. . . . . $\boxed{2}$

On a alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ell(\mathrm{Id}_E + tu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{t^i}{i}u^i$$

soit, en simplifiant

$$(\mathrm{Id}_E + tu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ell(\mathrm{Id}_E + tu) = u + (-1)^n t^{n-1} u^n = u. \qquad \boxed{2}$$

II.2. a. Soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ dans laquelle γ prend ses valeurs. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $t \neq t_0$, on sait alors que $\dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathcal{A}$. Or, $\mathcal{A}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ donc $\mathcal{A}$ est un espace fermé par conséquent on peut conclure $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \gamma'(t_0) \in \mathcal{A}$. . . . . $\boxed{3}$

On déduit de ce résultat que, comme γ' prend ses valeurs dans $\mathcal{A}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t)^k) = k\gamma'(t)\gamma(t)^{k-1}$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma(t)^k}{k!} = \gamma'(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma(t)^{k-1}}{(k-1)!} = \gamma'(t)\exp(\gamma(t)).$$

Ce résultat reste d'ailleurs valable même si $\gamma(t)$ n'est pas nilpotente. . . . . $\boxed{1}$

b. On applique ce qui précède à $\gamma(t) = \ell(\mathrm{Id}_E + tu)$ qui prend effectivement ses valeurs dans l'algèbre commutative $\mathbb{R}[u]$. Comme $\gamma(t) = uP(u)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\gamma(t)$ est nilpotent pour toutes les valeurs de t. On a alors

$$(\mathrm{Id}_E + tu)f'(t) = (I_E + tu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ell(\mathrm{Id}_E + tu)\exp[\ell(\mathrm{Id}_E + tu)] = u\exp[\ell(\mathrm{Id}_E + tu)] = uf(t). \qquad \boxed{1}$$

En dérivant à nouveau, on obtient

$$uf'(t) + (\mathrm{Id}_E + tu)f''(t) - uf'(t) = (\mathrm{Id}_E + tu)f''(t) = 0 \qquad \boxed{2}$$

et comme $\mathrm{Id}_E + tu$ est inversible (car $(\mathrm{Id}_E + tu)(\mathrm{Id}_E - tu + \cdots + (-1)^{n-1}u^{n-1}) = \mathrm{Id}_E$) on en déduit que $f'' = 0$ soit encore $f'(t) = f'(0) = u$. En intégrant à nouveau, on arrive à $f(t) = f(0) + tu = \mathrm{Id}_E + tu$.

Conclusion : en appliquant la dernière propriété à $t = 1$ on obtient en effet

$$\exp[\ell(\mathrm{Id}_E + u)] = \mathrm{Id}_E + u \qquad \boxed{3}$$

II.3. Comme $z \mapsto e^z$ est une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, on sait que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $e^\mu = \lambda$. Grâce à la question précédente, on a alors

$$\exp[\mu\,\mathrm{Id}_E + \ell(\mathrm{Id}_E + \frac{u}{\lambda})] = e^\mu \exp[\ell(\mathrm{Id}_E + \frac{u}{\lambda})] = \lambda(\mathrm{Id}_E + \frac{u}{\lambda}) = \lambda\,\mathrm{Id}_E + u \qquad \boxed{2}$$

II.4. On remarque tout d'abord que $\exp(A \oplus B) = \exp A \oplus \exp B$ qui se généralise aisément par récurrence. On a vu à la question précédente que toute matrice $T_k = \lambda_k + N_k$ avec $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ pouvait s'écrire sous la forme $\exp(A_k)$ donc toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est semblable à $\exp(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k)$.

Passons aux endomorphismes : on choisit une base dans laquelle la matrice de u s'écrit $T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$ alors $u = e^v$ où v est l'endomorphisme qui admet, dans la même base, la matrice $A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$.

Conclusion : $\exp\ : \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ est bien une surjection. 4

Exemple : on veut résoudre $\exp(A) = M$. Si (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique et u l'endomorphisme associé alors, dans la base $(e_1, e_2, e_2 - e_3)$ u admet pour matrice : $M' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $M' = P^{-1}MP$ avec $P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $M' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus (1)$ et on a vu au **I.3** que

$$\exp \begin{pmatrix} i\pi & -2 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $M' = \exp \begin{pmatrix} i\pi & -2 & 0 \\ 0 & i\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit, en utilisant la relation $M' = P^{-1}MP$ le résultat attendu

$$A = \begin{pmatrix} i\pi & -2 & -2 \\ 0 & i\pi & i\pi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 5

II.5. La démonstration est la même que celle du **II.3**, en effet, comme $\lambda > 0$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $e^\mu = \lambda$ et l'endomorphisme $\mu \operatorname{Id}_E + \ell(\operatorname{Id}_E + \frac{u}{\lambda})$ a pour exponentielle $\lambda \operatorname{Id}_E + u$. . 3

Partie III 19

III.1. Soit $\varphi\ : a + ib \in \mathbb{C} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors il n'est pas difficile de prouver que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{C}$ sur l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. φ est de plus continu (on est en dimension finie) donc $\varphi(e^z) = e^A$ pour $z = a + ib$ et $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. 2

On en déduit immédiatement le résultat demandé :

$$\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$ 3

On peut retrouver ce même résultat en remarquant que $A = aI + bJ$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$. $J^2 = -I$ et le calcul direct de l'exponentielle de J donne $e^J = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$ d'où, à nouveau, le résultat annoncé. 1

III.2. En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$\exp\begin{pmatrix}0 & -\pi\\ \pi & 0\end{pmatrix} = -I \qquad \boxed{1}$$

d'où, si $\mu = \ln(-\lambda)$ on a

$$\exp\left[\mu I + \begin{pmatrix}0 & -\pi\\ \pi & 0\end{pmatrix}\right] = \lambda I$$

et, en conclusion $A = \begin{pmatrix}\mu & -\pi\\ \pi & \mu\end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix}\mu & -\pi\\ \pi & \mu\end{pmatrix}$. . . . . $\boxed{3}$

III.3. On a vu, avec $\lambda = -1$ qu'il suffisait de prendre $A = \begin{pmatrix}0 & -\pi\\ \pi & 0\end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix}0 & -\pi\\ \pi & 0\end{pmatrix}$. Or, toute matrice semblable à A a une exponentielle qui sera aussi égal à $-I_{2n}$. Parmi les matrices semblables à A, on peut prendre $A' = \begin{pmatrix}0 & -\pi I_n\\ \pi I_n & 0\end{pmatrix}$ qui commute avec toute matrice $B \oplus B$. . . . . $\boxed{4}$

On a donc

$$-\exp(B \oplus B) = \exp(A)\exp(B \oplus B) = \exp(A + (B \oplus B)) \in \exp(\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})) \qquad \boxed{1}$$

Exemple : on sait d'après le **I.3** que

$$\exp\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

d'où

$$\exp\begin{pmatrix}0 & -1 & -\pi & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\pi\\ \pi & 0 & 0 & -1\\ 0 & \pi & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \boxed{4}$$

Partie IV $\boxed{20}$

IV.1. **a.** Immédiatement, on peut proposer la matrice $\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$ où $a = x + iy$, la question suivante apporte une réponse plus générale. . . . . $\boxed{2}$

b. On écrit $A = X + iY$ où $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ alors, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ de matrice $A \oplus \overline{A}$ dans la base canonique $(e_1 \ldots, e_{2n})$ alors la matrice de u dans la base $e_1 + e_{n+1}, \ldots, e_n + e_{2n}, i(e_1 - e_{n+1}), \ldots, i(e_n - e_{2n})$ est la matrice

$$\begin{pmatrix}X & -Y\\ Y & X\end{pmatrix}$$

qui est bien semblable à $A \oplus \overline{A}$. . . . . $\boxed{2}$

IV.2. Question classique, on a $UZ = ZV$ où $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on écrit $Z = X + iY$. On a alors les relations $\begin{cases} UX = XV \\ UY = YV \end{cases}$ donc, pour tout λ réel, $U(X + \lambda Y) = (X + \lambda Y)V$. Le polynôme $P(\lambda) = \det(X + \lambda Y)$ n'est pas le polynôme nul (car $P(i) \neq 0$) donc il existe un réel l tel que $X + lY$ soit inversible.

Conclusion : U et V sont bien semblables dans $\mathbb{R}$. . . . . $\boxed{4}$

IV.3. Comme $\det B = |\det A|^2$ on en déduit que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On sait alors qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(C) = A$. On vérifie facilement que $\exp(\overline{C}) = \overline{A}$ et que $\exp(C \oplus \overline{C}) = A \oplus \overline{A}$ (car C et $\overline{C}$ commutent). On a vu au **IV.1.b** que $C \oplus \overline{C}$ est semblable à $R \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et donc il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}(C \oplus \overline{C})P = R$ d'où

$$\exp(R) = P^{-1}(A \oplus \overline{A})P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Les deux matrices réelles $P^{-1}(A \oplus \overline{A})P$ et B sont semblables dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ donc aussi dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ (question **IV.2**) donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}(P^{-1}(A \oplus \overline{A})P)Q = B$ et, en conclusion :

$$\exp[Q^{-1}RQ] = B \in \exp \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \qquad \boxed{4}$$

IV.4. **a.** Ce qui a été fait à la question précédente s'applique en particulier à la matrice $B = A \oplus A$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ car ici $\overline{A} = A$. . . . . $\boxed{2}$

b. Comme tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a une racine réelle, on en déduit nécessairement que $n = 2p$. Les valeurs propres de B sont deux à deux conjuguées. Le polynôme caractéristique de B s'écrit donc $P_B(x) = Q(x)\overline{Q}(x)$ et, grâce au lemme des noyaux, on sait que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\, P_B(B) = \mathrm{Ker}\, Q(B) \oplus \mathrm{Ker}\, \overline{Q}(B)$. En outre, chacun de ces sous-espaces vectoriels est stable par B. . . . . $\boxed{4}$

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, alors $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_p})$ est une base de $\overline{E}$. Si A est la matrice de la restriction de u à E, $\overline{A}$ est la matrice de la restriction de u à $\overline{E}$. Le **IV.1.b** nous dit alors que B est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $A \oplus A$.

Conclusion : vu le résultat du **IV.3**, on peut affirmer que $B \in \exp \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. . . . . . $\boxed{2}$

Partie V $\boxed{22}$

V.1. La matrice B n'est évidemment pas diagonalisable.

Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de matrice A telle que $\exp A = B$.

- Si A a deux valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable, il en est de même pour B car $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$, ce qui est impossible.
- Si A a une valeur propre double α, elle est réelle et, vu le **I.2.a**, e^α est valeur propre de B ce qui est aussi impossible.

Conclusion : $B \notin \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. . . . . $\boxed{3}$

V.2. **a.** Soit V la matrice introduite par l'énoncé au **III.3**, on a prouvé que $V = \exp U \in \exp \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Or la restriction de l'endomorphisme associé à V aux deux premiers vecteurs de la base est justement la matrice B du **V.1**, ceci fournit l'exemple demandé par l'énoncé. . . . . $\boxed{3}$

b. On sait que F est stable par u et comme v et $P(u)$ commutent, on en déduit que F est stable par v. On a alors immédiatement $\exp(v_{|F}) = u_{|F}$. . . . . $\boxed{2}$

c. On a $\mathrm{Ker}(J_\lambda - \lambda I) = \mathbb{R}e_1$ (où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Comme $J_\lambda - \lambda I$ est un polynôme en J_λ alors si $J_\lambda \in \exp \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vu le résultat de la question b., la restriction de J_λ à $\mathbb{R}e_1$ serait une exponentielle de matrice, ce qui n'est pas possible vu que $\lambda < 0$. . . . . $\boxed{1}$

V.3. **a.** Les polynômes χ_2, χ_1^+, χ_1^- sont premiers entre eux deux a deux, le théorème de décomposition des noyaux s'applique et on a

$$E = \mathrm{Ker}\, \chi_2(u) \oplus F^+ \oplus F^- \qquad \boxed{2}$$

b. On sait de plus que, dans la décomposition de E en somme directe, chaque espace vectoriel intervenant est stable par u. On remarque alors que

- $u_{|\operatorname{Ker}\chi_2(u)}$ est une exponentielle d'après le **IV.4.b**.
- $u_{|F^+}$ est aussi une exponentielle d'après le **II.5**.

Donc, si $u_{|F^-}$ est une exponentielle alors u est une exponentielle (car la matrice de u, dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Ker}\chi_2(u) \oplus F^+ \oplus F^-$, est la somme ($\oplus$) de trois matrices exponentielles).

La réciproque est immédiate si avec le **V.2.b**. . . . . $\boxed{4}$

V.4. a. Si $u = \exp v$ alors $u = w^2$ avec $w = \exp \frac{v}{2}$. . . . . $\boxed{1}$

b. u et v commutent donc F^- est stable par v (théorème du cours). . . . . $\boxed{2}$

$v_{|F^-}$ n'a pas de valeur propre réelle car si μ était l'une d'elle, μ^2 serait une valeur propre de u associée à un vecteur propre dans F^- ce qui est impossible. D'après le **IV.4.**, $v_{|F^-}$ est une exponentielle. . . . . $\boxed{3}$

Grâce au résultat de la question **V.3.b**, on peut conclure :

$$u \in \exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$$

et $\exp \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ est exactement l'ensemble des carrés de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$. . . . . $\boxed{1}$