

SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

NOTATIONS ET OBJECTIFS

- n désigne un entier > 1 et E l'ensemble des matrices carrées (n, n) à termes réels ; A^T est la matrice transposée de A . On utilisera $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ base canonique de E .
- Les vecteurs x, y, \dots de \mathbb{R}^n seront désignés aussi par des matrices colonnes X, Y, \dots ; \mathbb{R}^n sera muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par : $(x|y) = (X|Y) = X^T \cdot Y$. La base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n sera représentée par les matrices colonnes $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$. On pourra utiliser la relation $E_{ij} = E_i \cdot E_j^T$.
- La norme d'un vecteur X de \mathbb{R}^n sera notée $|X|$. L'espace vectoriel E sera muni du produit scalaire $((\cdot | \cdot))$ défini par : $((A|B)) = \text{Tr}(A^T \cdot B)$. Le couple $(E, ((\cdot | \cdot)))$ est un espace euclidien. La norme d'une matrice sera notée $\|A\|$.

Le but du problème est de prouver que, pour une matrice M donnée, on peut trouver une matrice P , de rang inférieur à celui de M , telle que la distance de M à P soit minimale.

PARTIE I

Étude des matrices de rang 1

I.1. Factorisation des matrices de rang 1

- Soit m un endomorphisme de \mathbb{R}^n . Démontrer que m est de rang 1 si et seulement si il existe un vecteur x de \mathbb{R}^n et une forme linéaire u définie sur \mathbb{R}^n , non nuls, tels que pour tout vecteur t de \mathbb{R}^n : $m(t) = u(t) \cdot x$
Exemple : reconnaître M lorsque $x = e_i$, $u = e_j^*$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n , $(e_j^*)_{1 \leq j \leq n}$ la base duale associée.
- En déduire l'expression générale d'une matrice M de rang 1 à l'aide du produit d'une matrice colonne X et d'une matrice ligne Y^T .
- Établir les relations qui lient les matrices colonnes X, X' et Y, Y' lorsqu'une même matrice M de rang 1 est égale aux produits $X \cdot Y^T$ et $X' \cdot Y'^T$.
Montrer que, si $X \cdot Y^T = 0$ alors $X = 0$ ou $Y = 0$.

I.2. Rang d'une famille de matrices de rang 1

- Démontrer que toute matrice M de E est égale à une somme de matrices de rang 1.
- Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) et (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) deux bases de \mathbb{R}^n ; démontrer que la suite des matrices $(X_i \cdot Y_j^T)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de E .
- Soient (U_1, U_2, \dots, U_p) et (V_1, V_2, \dots, V_q) deux familles de vecteurs de \mathbb{R}^n , de rangs respectifs r et s .
Déterminer le rang de la famille des matrices $(U_i \cdot V_j^T)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ en tant que vecteurs de E .

I.3. Orthogonalité des matrices de rang 1 dans $E, ((\cdot | \cdot))$

- À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de \mathbb{R}^n , les matrices $X \cdot Y^T$ et $X' \cdot Y'^T$ sont-elles orthogonales dans $E, ((\cdot | \cdot))$?
- En déduire comment choisir deux suites $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n , pour que la suite des matrices $(X_i \cdot Y_j^T)$ soit orthonormée dans $E, ((\cdot | \cdot))$.

I.4. Matrices diagonalisables de rang 1

Soit A une matrice de rang 1 définie par $A = X.Y^T$; soit a le réel $X^T.Y$.

- Démontrer que la matrice A annule un polynôme de degré 2. En déduire les valeurs propres possibles de A .
- Pour quelles valeurs du réel a la matrice A est-elle diagonalisable ?
- Exemple* : considérer le cas suivant où $n = 3$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuter la diagonalisation de $A = X.Y^T$ selon les valeurs de α .

- Démontrer qu'il existe, dans E , une base de matrices diagonalisables de rang 1.

PARTIE II

Étude d'un endomorphisme

Soient A et B deux matrices de E , $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par la relation :

$$\Phi_{A,B}(M) = A.M.B^T.$$

Cette partie a pour but d'établir des propriétés de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$.

II.1. Rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$

Déterminer, en fonction des rangs r et s des matrices A et B , le rang de $\Phi_{A,B}$ (on calculera $\Phi_{A,B}(E_{ij})$).

II.2. Vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$

- Démontrer que, si V et W sont des vecteurs propres des matrices A et B , la matrice $V.W^T$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$.
- Caractériser les matrices de rang 1 qui appartiennent au noyau de $\Phi_{A,B}$.
- Soit $X.Y^T$ une matrice de rang 1 vecteur propre associé à la valeur propre μ , différente de 0, de $\Phi_{A,B}$.
Est-ce que X et Y sont des vecteurs propres de A et B ?
- Démontrer que, si A et B sont des matrices diagonalisables, l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est aussi diagonalisable. Calculer alors la trace de $\Phi_{A,B}$.
- Déterminer les valeurs propres de $\Phi_{A,B}$, dans le cas suivant :

$$n = 2 \quad A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Phi_{A,B}$ est-elle diagonalisable ?

II.3. Propriétés d'orthogonalité de $\Phi_{A,B}$

- L'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est supposé orthogonal dans $E, ((\cdot|\cdot))$, c'est à dire : pour toutes matrices M et N de E , $((\Phi_{A,B}(M)|\Phi_{A,B}(N))) = ((M|N))$.
En choisissant pour M et N deux matrices égales de rang 1, établir une relation simple, pour tout couple de vecteurs X et Y de \mathbb{R}^n , entre $|A.X|^2$, $|B.Y|^2$ et $|X|^2.Y|^2$.
- En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ soit orthogonal dans $E, ((\cdot|\cdot))$.

PARTIE III

Expression d'une matrice M de rang r à l'aide de matrices de rang 1

Désignons par m l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé, dans la base canonique à une matrice M de rang r , et par m^* l'endomorphisme adjoint de m .

III.1. Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$

Démontrer que le rang de l'endomorphisme composé $m^* \circ m$ est égal à r . Établir l'existence d'une base orthonormée de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $m^* \circ m$ telle que les valeurs propres α_i associées vérifient les relations :

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r > 0 \text{ et, si } r < n, \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = \alpha_n = 0.$$

III.2. a. Démontrer que les vecteurs $m(v_i)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer leurs normes.

b. En déduire qu'il existe deux bases orthonormées de \mathbb{R}^n , $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ telles que :

$$M = \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i} Y_i \cdot Z_i^T.$$

PARTIE IV

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang $\leq s$ dans E , ($(\cdot|\cdot)$)

La matrice M de rang r est donnée ainsi qu'un entier s vérifiant $s < r$; le but de cette partie est de déterminer une matrice P qui rende minimum la distance de M à l'ensemble \mathcal{R}_s des matrices de rang $\leq s$. La distance de la matrice M à \mathcal{R}_s est définie par la relation :

$$d(M, \mathcal{R}_s) = \inf\{\|M - N\|, N \in \mathcal{R}_s\}.$$

Il sera admis, dans la suite, que, si N est une matrice de rang q et M une matrice de rang r , la suite décroissante (γ_i) des valeurs propres de la matrice $(M - N)^T \cdot (M - N)$ vérifie, pour $1 \leq i \leq n - q$, l'inégalité :

$$\gamma_i \geq \alpha_{i+q}$$

où (α_i) est la suite décroissante des valeurs propres de $M^T \cdot M$.

IV.1. Le rang r de la matrice M est supposé > 1 . Soit s un entier tel que $0 < s < r$.

a. Soit $M = \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i} Y_i \cdot Z_i^T$ la décomposition de M obtenue au III. Montrer que la matrice

$$N = \sum_{i=1}^s \sqrt{\alpha_i} Y_i \cdot Z_i^T \text{ est de rang } s.$$

En déduire l'inégalité

$$d(M, \mathcal{R}_s) \leq \sqrt{\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r}.$$

b. Soit N une matrice de \mathcal{R}_s , comparer $\|M - N\|^2$ et $\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r$.

c. En déduire la valeur de $d(M, \mathcal{R}_s)$.

Existe-t-il une matrice P de \mathcal{R}_s telle que $\|M - P\| = d(M, \mathcal{R}_s)$?

d. Est-ce que \mathcal{R}_s est un sous-ensemble fermé de E ?

IV.2. Approximation par une matrice symétrique

Soit s un entier, $1 \leq s \leq n$, soit \mathcal{S}_s l'ensemble des matrices symétriques de rang $\leq s$. Soient A et B deux matrices respectivement symétriques et antisymétriques.

a. Que vaut $((A|B))$?

- b.** En utilisant la forme obtenue au III.2.b., démontrer qu'il existe une matrice symétrique U appartenant à \mathcal{S}_s approchant A au plus près.
Évaluer $\|A - U\|$ à l'aide des valeurs propres λ_i de A (on suppose que les valeurs propres de A sont rangées de la manière suivante : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$).
- c.** Soit M une matrice de E telle que $M = A + B$, où A symétrique, B antisymétrique.
Démontrer qu'il existe une matrice symétrique V appartenant à \mathcal{S}_s approchant M au plus près.
Donner la valeur de $d(M, \mathcal{S}_s)$.
Y-a-t-il unicité de la matrice V ?