SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

On identifie, à chaque fois que cela simplifie les notations, $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*, une matrice de* E *avec l'endomorphisme qui lui est associé dans la base canonique.*

Partie I $\boxed{36}$

Étude des matrices de rang 1

I.1. Factorisation des matrices de rang 1

a. ($\Rightarrow$) Si m est de rang 1, soit x un vecteur non nul dans $\operatorname{Im} m$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, $m(t) = u(t).x$ où $u(t)$ est un scalaire qui est uniquement déterminé par x. Comme m est linéaire, u l'est aussi. $u \neq 0$ (sinon $m(t)$ serait constamment nul, ce qui est écarté).

($\Leftarrow$) Si $m(t) = u(t).x$ alors $\operatorname{Im} m = \operatorname{Vect}(x)$ donc $\operatorname{Rg}(m) = 1$. .... $\boxed{3}$

Exemple : on a $M = E_{ij}$ matrice élémentaire. .... $\boxed{1}$

b. Si Y désigne les coordonnées de la forme linéaire u dans la base duale de la base canonique, alors $M = X.Y^{\mathrm{T}}$. .... $\boxed{2}$

c. En vertu de l'étude faite au a., X et X' sont colinéaires donc $X' = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$. Ensuite, vu que X et X' sont non nuls, $Y' = \dfrac{1}{\lambda} Y$.

Ensuite, par l'absurde, si X et Y sont non nuls alors on a vu que $X.Y^{\mathrm{T}}$ était de rang 1, donc non nul. .... $\boxed{3}$

I.2. Rang d'une famille de matrices de rang 1

a. Si $M = 0$ on écrit $M = E_{11} - E_{11}$,

sinon on écrit, $M = \sum\limits_{(i,j)\in Z} a_{ij} E_{ij}$ où $Z = \{(i,j) \in [1,n]^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$. .... $\boxed{2}$

b. Soit M une matrice de rang 1, alors on sait qu'il existe X et Y deux matrices unicolonnes telles que $M = X.Y^{\mathrm{T}}$. On décompose alors X dans la base des (X_i) et Y dans (Y_j) d'où

$$M = X.Y^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j Y_j\right)^{\mathrm{T}} = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j X_i Y_j^{\mathrm{T}}$$

donc $\operatorname{Vect}(X_i.Y_j^{\mathrm{T}})$ engendre l'ensemble des matrices de rang 1 donc l'ensemble E vu le a.

La suite des matrices $(X_i.Y_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une famille génératrice de E qui contient n^2 éléments donc c'est une base de E. .... $\boxed{5}$

c. On suppose dans un premier temps que $r = p$ et $s = q$. Montrons que la famille $(U_i.V_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle, $\sum\limits_{i,j} \lambda_{i,j} U_i.V_j^{\mathrm{T}} = 0$ alors, en multipliant à droite par une matrice X unicolonne, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i,j} \lambda_{i,j} U_i.V_j^{\mathrm{T}}\right).X &= \sum_{i=1}^{p} U_i.\left(\sum_{j=1}^{q} \lambda_{i,j} V_j^{\mathrm{T}}\right).X \\ &= \sum_{i=1}^{p} \mu_i U_i\end{aligned}$$

en posant $\mu_i = \left(\sum_{j=1}^{q} \lambda_{i,j} V_j^{\mathrm{T}}\right).X$. Comme la famille $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre, alors $\mu_i = 0$.
On passe alors aux transposées, et comme la famille $(V_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ est libre, on en déduit que $\lambda_{i,j} = 0$ pour tout (i,j).
La famille $(U_i.V_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est libre.
Remarque : on peut faire plus simple en complétant chaque famille $(U_1,\dots,U_r)$ et $(V_1,\dots,V_s)$ en deux bases. Vu la question précédente, la famille $(U_i.V_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base donc, la famille $(U_i.V_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant s}}$ est libre.
Dans le cas général, on place les vecteurs libres en première position, le rang de $(U_i.V_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est alors supérieur ou égal à $r.s$. Or, toute matrice de cette famille s'écrit en fonction des $(U_i.V_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant s}}$ donc le rang est bien égal à $r.s$. 6

I.3. Orthogonalité des matrices de rang 1 dans $E, ((.|.))$

a. On a
$$(X.Y^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.X'.Y'^{\mathrm{T}} = Y.\underbrace{X^{\mathrm{T}}.X'}_{\in\mathbb{R}}.Y'^{\mathrm{T}} = (X^{\mathrm{T}}.X').Y.Y'^{\mathrm{T}}$$
d'où
$$((X.Y^{\mathrm{T}}|X'.Y'^{\mathrm{T}})) = X^{\mathrm{T}}.X'\,\mathrm{Tr}(Y.Y'^{\mathrm{T}}) = X^{\mathrm{T}}.X'\,\mathrm{Tr}(Y'^{\mathrm{T}}.Y) = (X|X')(Y|Y')$$
donc les matrices $X.Y^{\mathrm{T}}$ et $X'.Y'^{\mathrm{T}}$ sont orthogonales dans $E, ((.|.))$ lorsque l'un des deux couples (X,X'), (Y,Y') est orthogonal. 3

b. Il suffit donc de prendre deux suites $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telles que
$$\begin{cases} i\neq j & (X_i|X_j).(Y_i|Y_j) = 0\\ i = j & (X_i|X_i).(Y_i|Y_i) = 1\end{cases} \quad (\Rightarrow \|X_i\|^2 = a \text{ et } \|Y_i\|^2 = \frac{1}{a})$$
pour que la suite des matrices $(X_i.Y_j^{\mathrm{T}})$ soit orthonormée dans $E, ((.|.))$. 1

I.4. Matrices diagonalisables de rang 1

a. Comme à la question 3.a., on a $A^2 = X.(Y^{\mathrm{T}}.X).Y^{\mathrm{T}} = aX.Y^{\mathrm{T}} = aA$.
Les valeurs propres de A sont donc à choisir dans $\{0,a\}$.
On remarque que $A.X = aX$ et, si Y' est un vecteur orthogonal à Y, $A.Y' = 0$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0,a\}$. 2

b. Si $a\neq 0$, A est diagonalisable car elle annule un polynôme scindé à racines simples.
Si $a = 0$, 0 est alors la seule valeur propre de A et comme $A\neq 0$, A n'est pas diagonalisable. 3

c. Dans le cas proposé, on a $a = 1+\alpha$, la discussion est immédiate. 1

d. Vu le résultat du b., il suffit de trouver deux familles $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ telles que $\forall (i,j)$, $(X_i|Y_j)\neq 0$. Soit $X_i = Y_i = E_1+\cdots+E_i$ où E_i désigne la matrice du $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique. Les suites $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont libres et répondent à la question. 4

Partie II $\boxed{26}$

Étude d'un endomorphisme

II.1. Rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$

On a $\Phi_{A,B}(E_{ij}) = A.E_{ij}.B^{\mathrm{T}} = (A.E_i).(B.E_j)^{\mathrm{T}}$ et, si on note (X_i) les vecteurs colonnes de A, (Y_j) ceux de B alors $\Phi_{A,B}(E_{ij}) = X_i.Y_j^{\mathrm{T}}$ donc le rang de $\Phi_{A,B}$ est celui de la famille $(X_i.Y_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Il suffit alors d'utiliser le résultat de la question I.2.c.

$$\mathrm{Rg}(\Phi_{A,B}) = rs \qquad \boxed{4}$$

II.2. Vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$

a. Si $A.V = \lambda V$ et $B.W = \mu W$ alors

$$\Phi_{A,B}(V.W^{\mathrm{T}}) = (A.V).(B.W)^{\mathrm{T}} = \lambda\mu V.W^{\mathrm{T}}$$

et comme $V.W^{\mathrm{T}} \neq 0$, $V.W^{\mathrm{T}}$ est bien un vecteur propre de Φ. .... $\boxed{1}$

b. Toute matrice de rang 1 s'écrivant sous la forme $V.W^{\mathrm{T}}$, alors, vu le calcul ci-dessus, si V est dans le noyau de A ou si W est dans celui de B alors $V.W^{\mathrm{T}}$ est dans le noyau de $\Phi_{A,B}$.
Réciproquement : si $V.W^{\mathrm{T}}$ est dans le noyau de $\Phi_{A,B}$ alors $(A.V).(B.W)^{\mathrm{T}} = 0$ et donc $A.V = 0$ ou $B.W = 0$. .... $\boxed{3}$

c. Supposons que l'on ait $(A.X).(B.Y)^{\mathrm{T}} = \mu X.Y^{\mathrm{T}}$ alors, d'après la question I.1.c. on a $AX = \lambda\mu X$ et $BY = \dfrac{1}{\lambda}Y$.
Conclusion : X et Y sont des vecteurs propres de A et B. .... $\boxed{3}$

d. Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de A et $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de B alors, vu le a., $(X_iY_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$.
On a alors, si $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ désignent les valeurs propres respectives de A et B,

$$\mathrm{Tr}(\Phi_{A,B}) = \sum_{i,j} \lambda_i\mu_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \mu_j = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) \qquad \boxed{3}$$

e. A et B ont i et $-i$ comme valeurs propres et sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Les valeurs propres de $\Phi_{A,B}$ sont donc 1 et -1. Pour prouver que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, on va montrer que $E_1(\Phi_{A,B})$ et $E_{-1}(\Phi_{A,B})$ sont de dimension 2.
Si on se place sur $\mathbb{C}$, alors $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $\overline{X_1} = X_2$ sont vecteurs propres de A et B donc $Z_1 = X_1.X_1^{\mathrm{T}}$ et $Z_2 = X_2.X_2^{\mathrm{T}}$ sont des vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$ associés à la valeur propre -1. Il suffit alors de prendre $U_1 = \dfrac{1}{2}(Z_1 + Z_2)$ et $U_2 = \dfrac{1}{2i}(Z_1 - Z_2)$ qui sont des matrices réelles, linéairement indépendantes, vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$.
On procède de même avec $Z_1' = X_1.X_2^{\mathrm{T}}$ et $Z_2' = X_2.X_1^{\mathrm{T}}$.
Conclusion : $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors que ni A, ni B ne l'étaient. .... $\boxed{5}$

II.3. Propriétés d'orthogonalité de $\Phi_{A,B}$

a. On prend bien sûr $M = X.Y^{\mathrm{T}}$ alors

$$(A.X).(B.Y)^{\mathrm{T}}.\underbrace{[(A.X).(B.Y)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}}_{=(B.Y).(A.X)^{\mathrm{T}}} = |B.Y|^2.|A.X|^2 = |X|^2.|Y|^2 \qquad \boxed{2}$$

b. En exploitant la relation précédente, on remarque que, pour X et Y non nuls, $\dfrac{|A.X|^2}{|X|^2} = \dfrac{|Y|^2}{|B.Y|^2}$ et ce rapport est indépendant de X, Y, A, B. Il existe donc un réel non nul a tel que $|A.X|^2 = a^2|X|^2$ et $|B.Y|^2 = a^{-2}|Y|^2$. .... $\boxed{2}$

Réciproquement : si $|A.X|^2 = a^2|X|^2$ et $|B.Y|^2 = a^{-2}|Y|^2$ alors, pour toutes matrices M et N de rang 1, $((\Phi_{A,B}(M)|\Phi_{A,B}(N))) = ((M|N))$. Comme ces matrices engendrent E alors la relation ci-dessus s'étend par bilinéarité à E tout entier.

Conclusion : $\Phi_{A,B}$ est orthogonal dans $E, ((.|.))$ ssi il existe $a > 0$ tel que aA et $\dfrac{1}{a}B$ soient des matrices orthogonales. .... $\boxed{2}$

Partie III $\boxed{8}$

Expression d'une matrice M de rang r à l'aide de matrices de rang 1

Désignons par m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé, dans la base canonique à une matrice M de rang r, et par m^* l'endomorphisme adjoint de m.

III.1. Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$

On prouve ici que $\operatorname{Ker}(m^* \circ m) = \operatorname{Ker} m$.

En effet, si $x \in \operatorname{Ker} m$ alors $m^* \circ m(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} m^* \circ m$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} m^* \circ m$ alors $(x|m^* \circ m(x)) = 0 = (m(x)|m(x)) = \|m(x)\|^2$ donc $m(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} m$.

On a alors $\operatorname{Rg}(m^* \circ m) = n - \dim \operatorname{Ker}(m^* \circ m) = n - \dim \operatorname{Ker}(m) = \operatorname{Rg}(m)$. .... $\boxed{3}$

On sait ensuite que $m^* \circ m$ est un endomorphisme symétrique donc il est diagonalisable dans une base orthonormée. $m^* \circ m$ est aussi positif.

Les vecteurs de cette base sont orthonormés et, quitte à permuter les vecteurs de cette base, on peut regrouper les r vecteurs propres correspondant aux valeurs propres > 0 en premier en les classant par ordre de valeur propre décroissante. .... $\boxed{2}$

III.2. **a.** On a donc $(m(v_i)|m(v_j)) = (v_i|m^* \circ m(v_j)) = \alpha_j(v_i|v_j) = \delta_{ij}\alpha_j$.

Les vecteurs $m(v_i)$ sont orthogonaux deux à deux et la norme de $m(v_i)$ vaut $\sqrt{\alpha_i}$. $\boxed{2}$

b. Soit Z_j la matrice de v_j et Y_i la matrice de $\dfrac{m(v_i)}{\sqrt{\alpha_i}}$ pour $i \leqslant r$. Si l'on complète la famille orthonormale (Y_i) en une base orthonormale alors on a répondu à la question. En effet

$$M.Z_j = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i.Z_i^{\mathrm{T}}.Z_j = \sqrt{\alpha_j} Y_j \qquad \boxed{2}$$

Partie IV $\boxed{24}$

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang $\leqslant s$ dans $E, ((.|.))$

IV.1. **a.** On sait, d'après la partie III qu'il existe (Y_i) et (Z_i) deux bases orthonormées telles que $M = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i.Z_i^{\mathrm{T}}$. Soit $N = \sum\limits_{i=1}^{s} \sqrt{\alpha_i} Y_i.Z_i^{\mathrm{T}}$, montrons que N est de rang s.

Si $NX = 0$ alors $NX = \sum\limits_{i=1}^{s} \sqrt{\alpha_i} Y_i.Z_i^{\mathrm{T}}.X = \sum\limits_{i=1}^{s} \sqrt{\alpha_i}(Z_i^{\mathrm{T}}.X)Y_i = 0$ et comme la famille $(Y_i)_{i \leqslant s}$ est libre alors $\forall i \in [1, s]$, $(Z_i|X) = 0$ i.e. X appartient à l'orthogonal de $\operatorname{Vect}(Z_i)_{i \in [1,s]}$ qui est un espace vectoriel de dimension $n - s$. Le noyau de N étant de dimension $n - s$, le rang de N est donc égal à s. .... $\boxed{3}$

On a alors

$$(M-N)^{\mathrm{T}}.(M-N)=\sum_{i,j=s+1}^{r}\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\alpha_j}Z_i.Y_i^{\mathrm{T}}.Y_j.Z_j^{\mathrm{T}}=\sum_{i=s+1}^{r}\alpha_i Z_i.Z_i^{\mathrm{T}}$$

d'où $((M-N|M-N))=\sum\limits_{i=s+1}^{r}\alpha_i$.

Conclusion : comme $\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)\leqslant \mathrm{d}(M,N)$ on a bien

$$\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)\leqslant\sqrt{\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_r}.$$ $\boxed{2}$

b. En refaisant le calcul ci-dessus, on a

$$((M-N|M-N))=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\geqslant\sum_{i=1}^{n-q}\alpha_i$$

en utilisant l'inégalité admise.

On a donc $\|M-N\|^2\leqslant\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_r$. .... $\boxed{2}$

c. On a prouvé successivement $\begin{cases}\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)\leqslant\sqrt{\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_r}\\ \text{et}\\ \sqrt{\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_r}\leqslant\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)\end{cases}$

donc $\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)=\sqrt{\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_r}$. .... $\boxed{1}$

Enfin, la matrice N donnée au a. vérifie $\|M-N\|=\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)$. .... $\boxed{0}$

d. Soit P_M la matrice telle que $\|M-P_M\|=\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)$ alors $M\in\overline{\mathcal{R}_s}\Leftrightarrow\mathrm{d}(M,\mathcal{R}_s)=0\Leftrightarrow\|M-P_M\|=0\Leftrightarrow M\in\mathcal{R}_s$ donc $\mathcal{R}_s$ contient tous ses points adhérents, il est fermé.

.... $\boxed{4}$

IV.2. Approximation par une matrice symétrique

a. En utilisant les propriétés de la trace, on obtient

$$((A|B))=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}.B)=\mathrm{Tr}((A^{\mathrm{T}}.B)^{\mathrm{T}})=\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}.A)=-\mathrm{Tr}(B.A)=-\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}.B)$$

car $\mathrm{Tr}(A.B)=\mathrm{Tr}(B.A)$ on en déduit que $((A|B))=0$. .... $\boxed{2}$

b. Il suffit de prouver que l'on peut prendre une matrice N, définie comme à la question 1.a., symétrique. Pour cela, on reprend la construction des suites (Y_i) et (Z_j). En fait, si on diagonalise A dans la base $(v_1,\dots,v_n)$, chaque vecteur v_i ayant Z_i comme matrice, alors $A^*.A=A^2$ est aussi diagonalisable dans cette même base. On aura alors $Y_i=\varepsilon_i Z_i$ et A s'écrira

$$A=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sqrt{\alpha_i}Y_i.Y_i^{\mathrm{T}}$$

et on pourra prendre $U=\sum\limits_{i=1}^{s}\varepsilon_i\sqrt{\alpha_i}Y_i.Y_i^{\mathrm{T}}$. .... $\boxed{4}$

On a alors $\|A-U\|=\sqrt{\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_r}=\sqrt{\lambda_{s+1}^2+\cdots+\lambda_n^2}$ .... $\boxed{1}$

c. Les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux pour le produit scalaire $((.|.))$. Donc, pour toute matrice V symétrique, on a

$$\|M-V\|^2=\|A-V\|^2+\|B\|^2$$

et, minimiser $\|M-V\|^2$ revient à minimiser $\|A-V\|^2$. L'existence de V vient du b. qui fournit aussi la valeur de $\mathrm{d}(M,\mathcal{S}_s)$. .... $\boxed{2}$

Enfin, il n'y a pas unicité de la matrice V, il suffit pour cela de prendre $M = I_n$ avec $n \geqslant 2$, $s < n$ alors toute matrice V diagonale contenant exactement s fois 1 sur la diagonale satisfait à la condition imposée. . . . . $\boxed{3}$