SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Dans tout le problème, E désigne un espace préhilbertien réel, $E \neq \{0\}$. Dans la partie **I**, E peut être de dimension infinie. Si f, g sont éléments de E, on notera $(f|g)$ le produit scalaire de f et g ; $\|f\|$ sera la norme associée au produit scalaire.

Les parties **II** et **III** sont indépendantes.

Soit $U \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique non nul. Si a est un réel fixé, on pose pour tout élément f de E

$$J(f) = \|f\|^4 - 2(f|U(f)) + a.$$

Partie I

I.1. Montrer que $\sup\limits_{f \in E} J(f) = +\infty$ (on pourra étudier $J(\lambda f)$).

I.2. Soit $f \in E$.

a. Pour $g \in E$, montrer que

$$J(f+tg) - J(f) - 4t\left[\|f\|^2(f|g) - (U(f)|g)\right] - 2t^2\left[\|f\|^2.\|g\|^2 - (g|U(g))\right]$$

est un carré parfait que l'on exprimera.

b. Montrer que J est différentiable (en dimension finie) et calculer $\operatorname{grad} J(f)$.

c. Montrer que les points où J réalise ses extrema (locaux ou absolus) sont à chercher dans les ensembles :

$$M_\mu = \{f \in E \ : U(f) = \mu f \text{ et } \|f\|^2 = \mu\} \quad (\mu \in \mathbb{R}_+).$$

d. Montrer que J réalise un minimum absolu en un point f de E ssi celui-ci vérifie :

(i) $U(f) = \|f\|^2 f$

(ii) $\forall g \in E$, $(g|U(g)) \leqslant \|f\|^2.\|g\|^2$.

Partie II

On suppose dans toute cette partie que E est de dimension finie ; si λ est une valeur propre de U, on notera E_λ le sous-espace propre associé.

II.1. Exprimer $\sup\limits_{\|g\|=1}(g|U(g))$, $\inf\limits_{\|g\|=1}(g|U(g))$ en fonction des valeurs propres de U.

II.2. Montrer que J présente un minimum absolu sur E.
Déterminer l'ensemble M des points de E où J réalise son minimum absolu et préciser la nature géométrique de M en fonction des valeurs propres de U et de leur ordre de multiplicité m (on se limitera aux cas où $m = 1, 2, 3$).

II.3. Soit $\mu \in \mathbb{R}_+$, $f \in M_\mu$ (notation du **I.2**).

a. On suppose ici qu'il existe au moins une valeur propre de $U > \mu$.
Montrer que, si $h \in \bigoplus\limits_{\lambda > \mu} E_\lambda$ alors, en notant λ_μ la plus petite des valeurs propres de U strictement plus grande que μ, on a :

$$0 < \|h\| < \sqrt{2(\lambda_\mu - \mu)} \Rightarrow J(f) > J(f+h)$$

et, en notant ν la plus grande valeur propre de U :

$$\|h\| > \sqrt{2(\nu - \mu)} \Rightarrow J(f) < J(f+h).$$

b. On suppose ici qu'il existe au moins une valeur propre de U inférieure ou égale à μ. Montrer que, si $h \in \bigoplus_{\lambda \leqslant \mu} E_\lambda$ alors, $J(f+h) \geqslant J(f)$ et que

$$\forall \alpha > 0, \exists h \in \bigoplus_{\lambda \leqslant \mu} E_\lambda \text{ tel que : } 0 < \|h\| < \alpha \text{ et } J(f+h) > J(f).$$

II.4. Dans quels cas J possède-t-elle des extrema locaux (non absolus)?
Préciser s'il s'agit alors de minimum ou de maximum local (une discussion claire et précise est exigée).

II.5. On appelle d la dimension de E. On range les valeurs propres de U par ordre décroissant : $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_d$, en répétant autant de fois les valeurs propres que leur ordre de multiplicité.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ une base orthonormale formée de vecteurs propres de U associés respectivement aux λ_i ; on note $F_p = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on pose

$$Q(F) = \sup_{\|g\|=1, g \in F} (g|U(g))$$

puis, si $0 \leqslant p \leqslant d-1$

$$q(p) = \inf_{F \mid \dim F = d-p} Q(F)$$

a. Si $\dim F = d-p$, montrer que $F \cap F_{p+1} \neq \{0\}$ et en déduire que $q(p) \geqslant \lambda_{p+1}$.
b. Montrer que $q(p) = \lambda_{p+1}$.

II.6. Dans cette question et la suivante, on suppose que E est égal à $\mathbb{R}^d$ rapporté à sa base canonique muni du produit scalaire canonique.
On suppose que U a pour matrice $(a_{ij})_{(i,j) \in [1,d]^2}$ et que $a = \sum_{(i,j) \in [1,d]^2} a_{ij}^2$.
Si $f = (f_i) \in \mathbb{R}^d$, mettre $J(f)$ sous une forme simple et donner une interprétation du problème de la minimisation de J.

II.7. On suppose de plus que U vérifie l'hypothèse (H) :

$$(H) \qquad \begin{cases} \forall (i,j) \in [1,d]^2 & : a_{ij} > 0 \\ \forall i \in [1,d] & : \sum_{j=1}^{d} a_{ij} = 1 \end{cases}$$

a. Montrer que 1 est la plus grande valeur propre de U et que toutes les valeurs propres de U sont de module inférieur ou égal à 1.
b. Soit B la matrice déduite de la matrice de U par suppression de la première ligne et de la première colonne ; soit μ_1 la plus grande valeur propre de B.
Montrer, à l'aide du **II 5**, que $\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2$.
c. Montrer que $\mu_1 < 1$ et en déduire que 1 est valeur propre simple de U.
d. Déterminer les points de $\mathbb{R}^d$ où J admet un minimum et donner la valeur de ce minimum.
e. Montrer que U^2 vérifie encore l'hypothèse (H), en déduire que -1 ne peut être valeur propre de U.
f. Prouver que la suite d'endomorphismes U^n converge et préciser géométriquement sa limite. Donner aussi la limite de U^n sous forme matricielle dans la base canonique.

PARTIE III

On suppose dans cette partie que E est l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit u une fonction continue de $[-1,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2 \quad u(x,y) = u(y,x).$$

On pose, si $f \in E$ et $x \in [-1,1]$, $U(f)(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} u(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$.

III.1. Montrer que U est un endomorphisme de E, montrer qu'il est symétrique.

III.2. Si $a = \displaystyle\iint_{[-1,1]^2} u^2(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, donner une expression simple de $J(f)$ et une interprétation du problème de la minimisation de J.

III.3. On pose désormais $u(x,y) = e^{|x-y|}$ pour $(x,y) \in [-1,1]^2$, soit $f \in E$.
Montrer que $g = U(f)$ si et seulement si
- (i) g est de classe C^2,
- (ii) g satisfait une équation différentielle du second ordre que l'on précisera,
- (iii) $g(-1) + g'(-1) = g(1) - g'(1) = 0$.

On remarquera que $u(x,y) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{si } x \geqslant y \\ e^{y-x} & \text{si } x \leqslant y \end{cases}.$

III.4. Montrer que $\mathrm{Ker}(U) = \{0\}$ et déterminer $\mathrm{Im}\,U$.

III.5. On pose $\omega^2 = \dfrac{\lambda+2}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$. Montrer que la recherche des solutions de $U(f) = \lambda f$ (pour $\lambda \neq -2$) se ramène à la résolution des équations

$$\begin{cases} x & = \tan x \\ \text{ou} & \\ x & = -\operatorname{cotan} x \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x & = \operatorname{th} x \\ \text{ou} & \\ x & = -\coth x \end{cases}.$$

Préciser les intervalles disjoints contenant chacun une valeur propre et une seule.

III.6. Donner une caractérisation de la plus grande valeur propre positive de U. Déterminer les éléments de E où il semble le plus vraisemblable que J réalise son minimum.
Indiquer pourquoi vous ne pouvez affirmer que J réalise un minimum.