SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Partie I $\boxed{14}$

I.1. Soit f un vecteur de E non nul, alors $J(\lambda f) = \lambda^4\|f\|^4 - 2\lambda^2(f|U(f)) + a$ et donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} J(\lambda f) = +\infty$. Conclusion : on a bien $\sup\limits_{f\in E} J(f) = +\infty$. $\boxed{2}$

I.2. **a.** En utilisant la symétrie de U on obtient

$$J(f+tg) - J(f) - 4t\left[\|f\|^2(f|g) - (U(f)|g)\right] - 2t^2\left[\|f\|^2.\|g\|^2 - (g|U(g))\right] = t^2\left[2(f|g) + t\|g\|^2\right]. \quad \boxed{3}$$

b. Compte tenu des calculs ci-dessus, en prenant $t = 1$, on obtient directement la différentielle de J : $J'(f)(g) = 4[\|f\|^2(f|g) - (U(f)|g)]$ (en revenant à la définition) par conséquent $\operatorname{grad} J(f) = 4[\|f\|^2 f - U(f)]$. $\boxed{3}$

c. Si J réalise un extremum en $f \in E$ alors $\operatorname{grad} J(f) = 0$ (car E est un ouvert) soit $U(f) = \|f\|^2 f$ i.e. $f \in M_{\|f\|^2}$. $\boxed{2}$

d. On a vu au **c** que si J passe par un minimum en f alors $U(f) = \|f\|^2 f$, on a donc déjà la condition (i).
Avec cette condition, $J(f+tg) - J(f) = t^2(t\|g\|^2 + 2(f|g))^2 + 2(\|f\|^2.\|g\|^2 - (g|U(g))$ est $\geqslant 0$ et ceci pour tout g et pour tout t, donc, en prenant $t = -2\frac{(f|g)}{\|g\|^2}$ (pour $g \neq 0$), on a $\|f\|^2.\|g\|^2 \geqslant (g|U(g))$ (ii). $\boxed{3}$
La réciproque est immédiate avec l'égalité que l'on vient d'écrire. $\boxed{1}$

Partie II $\boxed{55}$

II.1. U est diagonalisable dans une b.o.n. car symétrique en dim. finie. Soit $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_p$ où $g_i \in E_{\lambda_i}$, alors (en supposant que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p$) $U(g) = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_p g_p$ et donc $(g|U(g)) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i\|g_i\|^2$; on a alors le résultat du cours : $\lambda_1 \leqslant (g|U(g)) \leqslant \lambda_p$.
Conclusion $\sup\limits_{\|g\|=1} (g|U(g)) = \lambda_p$ et $\inf\limits_{\|g\|=1} (g|U(g)) = \lambda_1$. $\boxed{3}$

II.2. On doit avoir $U(f) = \|f\|^2.f$ et $\forall g \in E$: $(g|U(g)) \leqslant \|f\|^2.\|g\|^2$ (cf. **I.2.d**). Si $f \neq 0$ alors f est un vep et l'inégalité du **I.2.d**(ii) nous impose $\|f\|^2 = \lambda_p$ (i.e. $\lambda_p > 0$). $\boxed{3}$
L'ensemble des points où on a un minimum strict dans le cas où $\lambda_p > 0$ est

- si $m = 1$, les 2 vecteurs $\pm\sqrt{\lambda_p} f_p$ où f_p est un vecteur propre unitaire de E_{λ_p},
- si $m = 2$, un cercle de rayon $\sqrt{\lambda_p}$,
- si $m = 3$, la sphère de E_{λ_p} de rayon $\sqrt{\lambda_p}$. $\boxed{1}$

Car $m = \dim E_{\lambda_p}$ vu que U est diagonalisable.
Si $\lambda_p \leqslant 0$ alors le minimum strict est atteint en 0 uniquement. $\boxed{2}$

II.3. **a.** On sait que $J(f+h) - J(f) = (\|h\|^2 + 2(f|h))^2 + 2\|f\|^2.\|h\|^2 - 2(h|U(h))$. D'une part $(h|U(h)) \geqslant \lambda_\mu\|h\|^2$, d'autre part $(f|h) = 0$ car $f \in M_\mu$ et on a soit $f = 0$ soit $f \in E_\mu \perp \bigoplus\limits_{\lambda>\mu} E_\lambda$. Donc on a $J(f+h) - J(f) \leqslant \|h\|^2(\|h\|^2 - 2(\lambda_\mu - \mu)) < 0$. $\boxed{3}$

Ensuite, comme $(h|U(h)) \leqslant \nu\|h\|^2$ alors on en déduit les inégalités suivantes $J(f+h) - J(f) \geqslant \|h\|^2(\|h\|^2 - 2(\nu - \mu)) > 0$. . . . . $\boxed{2}$

b. Si $h \in \bigoplus_{\lambda \leqslant \mu} E_\lambda$ alors $(h|U(h)) \leqslant \mu\|h\|^2 = \|f\|^2.\|h\|^2$ d'où

$$J(f+h) - J(f) \geqslant (\|h\|^2 + 2(f|h))^2 \geqslant 0. \qquad \boxed{2}$$

La deuxième propriété se vérifie facilement : pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver h tel que $\|h\| \in]0, \alpha[$ et $\|h\|^2 + 2(f|h) \neq 0$. . . . . $\boxed{2}$

II.4. J possédera des minima locaux uniquement dans la situation **II.2** et ce sont des minima globaux. . . . . $\boxed{2}$

Pour les maxima (locaux), il faudrait que l'on ait la situation du **II.3.a** sans avoir celle du **II.3.b** ! Il faut que μ soit la plus petite des vap ou que μ soit nulle.

Si μ est vap alors $\forall \alpha > 0$, $\exists h \in E_\mu$, $\|h\| < \alpha$: $J(f+h) > J(f)$ donc f n'est pas un maximum local.

Conclusion : la seule possibilité que l'on ait un maximum local est que toutes les vap de U soient > 0 et dans ce cas, le maximum est en 0. . . . . $\boxed{4}$

II.5. a. On a $\dim F \cap F_{p+1} = \dim F + \dim F_{p+1} - \dim(F + F_{p+1}) \geqslant d - p + p + 1 - d = 1$ donc pour tout sous-espace vectoriel F tel que $\dim F = d - p$ alors il existe $g \in F \cap F_{p+1}$ tel que $\|g\| = 1$. . . . . $\boxed{1}$

On a alors

$$Q(F) = \sup_{g \in F \cap S(0,1)} (g|U(g)) \geqslant \sup_{g \in F \cap F_{p+1} \cap S(0,1)} (g|u(g))$$
$$\geqslant \inf_{g \in F \cap F_{p+1} \cap S(0,1)} (g|u(g)) \geqslant \inf_{g \in F_{p+1} \cap S(0,1)} (g|u(g)) = \lambda_{p+1}.$$

On a donc $\forall F$: $Q(F) \geqslant \lambda_{p+1}$ d'où $q(p) \geqslant \lambda_{p+1}$. . . . . $\boxed{4}$

b. Il suffit alors de prendre : $F = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_d)$ pour obtenir l'égalité. . . . . $\boxed{2}$

II.6. On a $J(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^2 - 2 \sum_{(i,j) \in [1,d]^2} a_{ij} f_i f_j + a = \sum_{(i,j) \in [1,d]^2} (f_i f_j - a_{ij})^2$. . . . . $\boxed{2}$

Interprétation : on cherche la matrice unicolonne F telle que $F.F^{\mathrm{T}}$ approche le mieux la matrice de U au sens de la norme $\sqrt{\sum_{(i,j) \in [1,d]^2} (f_i f_j - a_{ij})^2}$. . . . . $\boxed{2}$

II.7. a. Le vecteur qui a toutes ses coordonnées égales à 1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. . . . . $\boxed{1}$

Si x est un vep associé à la plus grande vap λ, x_{i_0} sa plus grande coordonnée en valeur absolue alors : $\sum_{j=1}^{d} a_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0}$ et donc $|\lambda|.|x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{d} a_{i_0 j}|x_j| \leqslant |x_{i_0}|$ d'où $|\lambda| \leqslant 1$.

Comme 1 est vap, on en déduit le résultat. . . . . $\boxed{3}$

b. D'une part, si (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^d$, $F = \mathrm{Vect}(e_2, e_3, \ldots, e_d)$ alors $Q(F) = \mu_1$ et $Q(F) \geqslant \lambda_2 = \lambda_{1+1}$. . . . . $\boxed{3}$

D'autre part $\mu_1 \leqslant \lambda_1$ car $\mu_1 = \sup_{g \in F \cap S(0,1)} (g|U(g)) \leqslant \sup_{g \in E \cap S(0,1)} (g|U(g)) = \lambda_1$. . . . . . . $\boxed{1}$

c. Comme $\sum_{j=2}^{k} a_{ij} < 1$, par le même raisonnement qu'au **II.7.a**, on en déduit $\mu_1 < 1$. 2

Donc, vu les conclusions du **II.5**, $1 > \mu_1 \geqslant \lambda_2$ i.e. 1 est vap simple. 1

d. Les minima sont obtenus pour $f = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{d}}(1, 1, \dots, 1)$ et 2

$$J(f) = \sum_{(i,j)\in[1,d]^2} \left(\frac{1}{d} - a_{ij}\right)^2 = a - 1.$$ 1

e. Soit $U = (a_{ij}^{(2)})$, alors $a_{ij}^{(2)} = \sum_{h=1}^{d} a_{ih}a_{hj} > 0$ et $\sum_{j=1}^{d} a_{ij}^{(2)} = \sum_{h=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} a_{hj}\right) = 1$ donc U^2 vérifie (H) (et U^2 est symétrique). 1

1 est donc vap simple de U^2 ce qui permet de dire que -1 n'est pas vap de U. . . . 1

f. Pour montrer qu'une suite d'endomorphismes converge, il faut et il suffit de prouver que, pour tout vecteur f de E, la suite $U^n(f)$ converge dans E. On écrit alors $f = g_1 + g_2 + \dots + g_p$ où les g_i sont éléments de E_{λ_i} ($\lambda_1 = 1$, $|\lambda_i| < 1$ pour $i \neq 1$). Par une récurrence immédiate, on obtient : $U^n(f) = g_1 + \lambda_2^n g_2 + \dots + \lambda_p^n g_p$. On a donc la limite de $U^n(f)$ qui vaut g_1 i.e. 1

La matrice de U^n a pour limite la projection orthogonale sur E_{λ_1}. 1

Elle converge vers la matrice $\frac{1}{d}\,(1)$. 2

PARTIE III 38

III.1. Grâce au théorème de continuité sous le signe intégral, $U(f)$ est continue :

- $(x, y) \mapsto u(x, y)f(y)$ est continue par rapport à x et à y, on a l'hypothèse de continuité,
- sur le compact $[-1, 1]^2$, cette même application est bornée ce qui donne l'hypothèse de domination et permet de conclure. 2

On utilise ensuite le théorème de Fubini et la relation $u(x, y) = u(y, x)$:

$$\begin{aligned}(f|U(g)) &= \int_{-1}^{1} f(x)\left(\int_{-1}^{1} u(x, y)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \iint_{[-1,1]^2} u(x, y)f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} g(y)\left(\int_{-1}^{1} u(y, x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = (U(f)|g)\end{aligned}$$ 3

III.2. Par un raisonnement semblable à celui du **II.6**, on a

$$J(f) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (f(x)f(y) - u(x, y))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$ 2

L'interprétation est la suivante : chercher la meilleure approximation de $u(x, y)$ au sens de la norme $\|F\|_2^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F^2(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ par une fonction de la forme $f(x).f(y)$. . . . 2

III.3. $\boxed{\Rightarrow}$ $g(x) = e^x \int_{-1}^{x} e^{-y}f(y)\,\mathrm{d}y + e^{-x}\int_{x}^{1} e^{y}f(y)\,\mathrm{d}y$ qui est dérivable d'où :

$$g'(x) = e^x \int_{-1}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y - e^{-x}\int_{x}^{1} e^{y}f(y)\,\mathrm{d}y$$

d'où $g''(x) = g(x) + 2f(x)$ ce qui permet d'avoir (i & ii). 4

$g(-1)+g'(-1)=e^{-1}\displaystyle\int_{-1}^{1}e^{y}f(y)\,\mathrm{d}y-e^{-1}\int_{-1}^{1}e^{y}f(y)\,\mathrm{d}y=0$, de même pour $g(1)-g'(1)$ ce qui donne la propriété (iii). . . . . $\boxed{1}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On sait déjà que $U(f)$ est une solution de l'équation différentielle. . . . . $\boxed{1}$

Soit h une autre solution alors $f(x)=g(x)-h(x)$ vérifie : $f''(x)=f(x)$ par conséquent $f(x)=ae^{x}+be^{-x}$, mais $f(-1)+f'(-1)=2ae^{-1}=0$ donne $a=0$, puis $f(1)-f'(1)=0$ entraîne $b=0$ donc $f=0$ c.q.f.d. . . . . $\boxed{2}$

III.4. $\operatorname{Im}U=\{g\in C^{2}|g(-1)+g'(-1)=g(1)-g'(1)=0\}$ (poser $f=\dfrac{g''-g}{2}$). . . . . $\boxed{3}$

$\operatorname{Ker}U=\{0\}$ car $(U(f))''-U(f)=2f$. . . . . $\boxed{2}$

III.5. $U(f)=\lambda f\Leftrightarrow\lambda f''=\lambda f+2f$ et $f(-1)+f'(-1)=f(1)-f'(1)=0$ d'où l'équation $(\lambda+2)f-\lambda f''=0$. . . . . $\boxed{1}$

On pose $\omega^{2}=\dfrac{\lambda+2}{\lambda}$ ($\omega\in\mathbb{R}$ ou $\omega\in i\mathbb{R}$, $\omega\neq\pm1$) ; l'ensemble des solutions de l'équation différentielle s'écrira : $f(x)=ae^{\omega x}+be^{-\omega x}$.

Les deux autres conditions vont s'écrire : $a(1+\varepsilon\omega)e^{-\varepsilon\omega}+b(1-\varepsilon\omega)e^{\varepsilon\omega}=0$ ($\varepsilon=\pm1$). $\boxed{2}$

Pour avoir une solution non nulle, il faut et il suffit que $e^{2\omega}=\pm\dfrac{1+\omega}{1-\omega}$, ce qui peut encore s'écrire :

$\omega=\dfrac{\pm e^{2\omega}-1}{\pm e^{2\omega}+1}$ et selon que ω est réel ou imaginaire pur, on obtiendra respectivement :

$\begin{cases}\omega=\operatorname{th}\omega & (1)\\ \omega=-\coth\omega & (2)\end{cases}$ ou $\begin{cases}\alpha=\tan\alpha & (3)\\ \alpha=-\operatorname{cotan}\alpha & (4)\end{cases}$ $(\omega=i\alpha)$. . . . . $\boxed{3}$

- Si $\lambda=-2$, comme $f''=0$, l'ensemble des solutions s'écrira $f(x)=bx$. . . . . $\boxed{1}$
- Si $\lambda\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, $\omega\in\mathbb{R}$:
  - (1) n'a que 0 comme racine, ce qui est à écarter ;
  - (2) a deux racines opposées $\omega_1<-1$ et $\omega_2>1$ et $\lambda=\dfrac{2}{\omega_2^{2}-1}>0$. . . . . $\boxed{2}$
- Si $\lambda\in]-2,0[$, $\omega\in i\mathbb{R}$,
  - (3) possède une infinité de solutions (et comme on peut choisir $\alpha>0$) on obtiendra une racine dans chaque intervalle $]k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}[$, $k\in\mathbb{N}$,
  - (4) possède aussi une infinité de solutions, on obtiendra une racine dans chaque intervalle $]k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{N}$. . . . . $\boxed{2}$

On obtient alors des intervalles contenant une seule vap de U :

$$\frac{-2}{1+(k\pi)^{2}}<\lambda_k<\frac{-2}{1+(k+1/2)^{2}\pi^{2}}\text{ et }\frac{-2}{1+(k+1/2)^{2}\pi)^{2}}<\lambda_k<\frac{-2}{1+(k+1)^{2}\pi^{2}}.\quad\boxed{2}$$

III.6. La plus grande vap positive est en fait la seule racine positive : il suffit donc de rechercher la seule racine positive de $\coth\omega=-\omega$ et de reporter dans l'expression de λ. . . . . $\boxed{1}$

Les éléments de E où J est susceptible de réaliser son minimum seront les fonctions vep de J pour la plus grande vap positive de U de norme égale à $\sqrt{\lambda}$ (ce qui donne 2 fonctions en tout). . . . . $\boxed{1}$

On ne pourra pas alors conclure directement car on n'est plus comme au **II** en dimension finie. . . . . $\boxed{1}$